

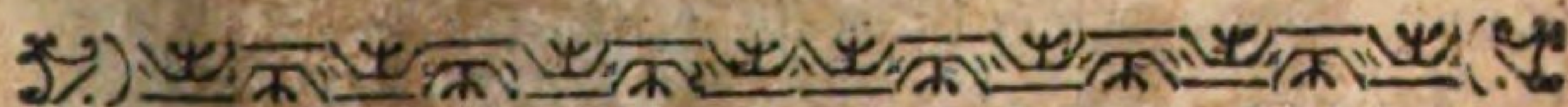
1.
I. H. LAMBERT
ACADEMIAE SCIENTIARVM ELECTO-
RALIS BOICAE, ET SOCIETATIS PHYSICO-ME-
DICAЕ BASILIENSIS MEMBRI, REGIAE SOCIETATI
SCIENTIARUM GOETINGENSI COMMERCIO
LITERARIO ADIVNCTI

PHOTOMETRIA

SIVE

DE

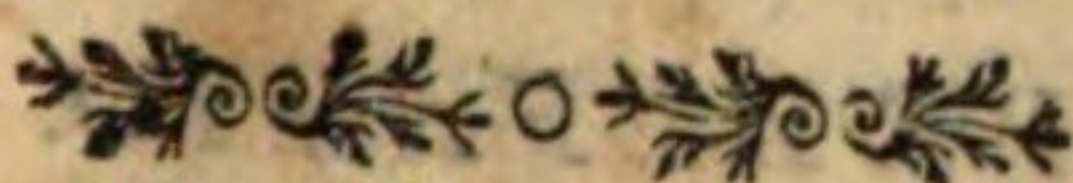
MENSURA ET GRADIBVS
LVMINIS,
COLORVM ET VMBRAE



AUGUSTAE VINDELICORUM,
Sumptibus VIDVAE EBERHARDI KLETT
Typis CHRISTOPHORI PETRI DETLEFFSEN.
MDCCLX.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München



PRAEFATIO.

Quo una fidem datam & liberatam inter se conferre Lectores possint, verba ipsa, quibus me ad edendum hoc Photometriae tentamen in praefamine tractatus *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs &c.* obstrinxi, ipsi tractationi praefigenda duxi. Ita vero sonant.

L'autre partie de l'Optique, dont j'ai principalement dessin de parler, c'est la Photometrie. Elle s'occupe de l'eclat de la lumière, de sa densité, de sa force illuminante, de ses modifications dans les couleurs & dans l'ombre, de ses degrés, des accroissement & diminutions, qu'elle souffre dans tous les cas. Si la première partie de l'Optique a été d'un secours infini, pour corriger les défauts de la vue, pour rectifier les jugemens des yeux, pour démêler les apparences d'avec la vérité, pour nous faire connoître des mondes, que la nature sembloit avoir voulu nous cacher, en les éloignant audela de la portée de notre vue, ou en les rendant imper-
X 2 *cepti-*

P R A E F A T I O.

ceptibles par leur petitesse, il faut dire, que notre connoissance de la lumiere elle même n'en a pas été fort perfectionnée. Le Photometrie y contribue infiniment plus. Qui veut imaginer une théorie de la lumiere, il ne lui suffira pas de savoir, qu'elle se se reflechit & se brise suivant une certaine loi: mais il lui importera, d'en pouvoir déduire la quantité de l'une & de l'autre conformément aux experiences.

La Photometrie n'est pas un país entierement inculte. Des savans fort célèbres y ont travaillé. Mr. Bouguer en a donné un très bel *Essay sur la Gradation de la lumiere*. Il la fait passer par plusieurs vitres, par l'eau par l'atmosphère. Il en cherche l'affloiblissement. Il s'en sert pour la célèbre experience sur la comparaison de la clarté du Soleil & de la Pleine-Lune. Mr. Euler a encore donné nouvellement une *Dissertation sur les différens degrés de la lumiere des Astres*; & on trouve dans plusieurs *Optiques* des recherches, qui ont du rapport à la Photometrie, & en particulier dans celle de Mrs. Smith & Kaestner.

Tous ces *Essais* sont des parties détachées d'un tout, dont il paroît qu'on est encore fort éloigné. Aussi n'en doit on pas être surpris. Rien de plus difficile, que la mesure de la lumiere, lorsqu'on veut la poursuivre dans toutes
ses

P R A E F A T I O.

ses modifications & dans tous les Phénomènes, qu'elle nous offre. Si les principes pour trouver les routes de la lumière étoient aisés & simples, si les bords de l'ombre ou des rayons atténués, qui entroient dans une chambre obscure, les marquoient visiblement, il s'en faut de beaucoup, que ceux, dont on a besoin pour la Photometrie le soient aussi. Il arrive rarement ou jamais, qu'on les voie seuls, & il faut nombre d'expériences, pour les dégager des circonstances accidentelles dans lesquelles ils sont toujours envelopés.

Cette Science nous manquant donc presque entièrement & étant d'ailleurs fort curieuse, je me propose d'en donner un essai au public, lequel sans être complet ne laissera pas d'être assez détaillé.

On y trouvera la suite d'expériences, qu'il m'avoit falu faire, pour déterminer la quantité de la lumière réfléchie & brisée sur la surface extérieure & intérieure du verre sous chaque obliquité d'incidence. J'ai taché d'un autre côté, d'y appliquer un calcul, que les expériences ne démentissent point. On sait que c'est justement ce qui restoit de plus inexplicable dans la théorie de la lumière, & on pouvoit croire avec quelque droit, qu'une théorie, qui expliqueroit ce phénomène & qui fourniroit les principes

P R A E F A T I O.

pour les calculs, ne pouvoit qu'être extrêmement aprochante de la véritable. J'applique ces mêmes Experiences a plusieurs verres, & par là j'obtiens pour chaque angle d'incidence, ce que Mr. Bouguer avoit cherché pour les angles droits. Je traite de la diminution de la lumiere, qui passe par l'atmosphere, sans avoir besoin de quelque hypothese physique. On y trouvera la théorie de l'intensité de la lumiere directe & la clarté des objets illuminés, comparée à celle de la lumiere, qui les illumine, la clarté des images dans les foyers d'un verre caustique comparée à celle des objets mêmes, par théorie & par experience, en faisant entrer dans le calcul la quantité de lumiere, que les surfaces du verre reflechissent. L'Illumination du systeme planetaire, & la clarté des planètes & de leurs phases vues de la terre, leur force illuminante &c. Cette theorie n'est point du tout une copie de celle de Mr. Euler. Elle part de principes différens & plus détaillés, & repond parfaitement à l'expérience de Mr. Bouguer pour la clarté de la Lune comparée à celle du Soleil, que le calcul de Mr. Euler donna plus petite contre son atente, & que Mr. Smith trouva plus grande par le sien. Les differens degrés de l'ombre & leur mesure. Des instrumens pour déterminer le degré de la clarté des couleurs

PRAEFATIO.

couleurs & de leur melange. La clarté des objets en tant qu'elle depend de l'ouverture de la pupille &c.

Voici quelques sujets que je traite dans ma Photometrie simplement indiqués. Pour donner quelque idée du tout, je dirai, que quant aux matieres, que l'on trouve déjà dans d'autres livres, ce que j'en dirai, differera, comme le present traité differe de ce que d'autres Auteurs ont trouvé sur les refractions astronomiques, & que pour celles, qui sont toutes nouvelles, ne trouvant à les comparer qu'aux experiences, il suffira de dire, qu'elles auront leur suffrage.

Quodsi promissa haec ab aequis Lectoribus cum ipso opere conferantur, facile experiri ipsis licebit, quatenus iis steterim. Vnam forsitan theoriâ illuminationis corporum opacorum ex parte suppressam iudicabunt. Mutatae vero sententiae rationem si quis ex me quaerat, haud desunt, quae monenda habeo. Theoriâ istam, quam potissimum in Cap. II. P. III. evolutam dedi, eatenus tantum retinui, quatenus non modo strictiorem eam admittere videbam demonstrationem, verum & vel maxime, quatenus inde deduci poterat experimentorum istorum ratio, quibus corporum albedo, eorumque color, & quantitates luminis ab istis reflexi, a posteriori, quod aiunt, determinandae erant. Quibus peractis in his ipsis experimentis substiti, atque theoriâ istam nulli hypothese eatenus innixam firmam

atque

PRAEFATIO.

atque ratam esse, omnibus iterum iterumque
expensis etiamnum adfirmatum ire haud am-
bigō.

Alteram theoriae istius partem, qua eadem
luminis reflexi quantitas a priori eruenda at-
que definienda fuisset, vi eorum quae §. 18.
pollicitus eram, duplicem dare, siue duplici
eam systemati virorum summorum NEWTO-
NI atque EVLERI adcommodare constitue-
ram. At re maturius pensitata a proposito in
praesentiarum recessi, alio forsan tempore ad
istud regressurus. In experimentis quibus dif-
ficillimam hanc rem absolutam dedi, si ac-
quiesco, veniam hanc ab aequis lectoribus me
impetraturum esse spero. Neque dubito, quin
cel EVLERVS, pro eximio, quo pollet inge-
nii acumine & sagacitate, quantitates experi-
mentis istis erutas, & ex ingeniosissimo suo
systemate definitum eat, si quidem rem istam
operae pretium esse ducat. Alterius hypo-
theseos prima fundamenta in §. 698. lectores
inuenient, iisque quoque rationes subiunxi,
ob quas a proposito destiti, istud saltem in
aliud tempus distuli.

Ut ergo hac ratione ea theoriae pars, quae
vel minus videbatur matura, vel minus firmis
nitebatur fulcris, suppressa deprehendetur,
ita contra ea, quae de claritate corporum opa-
corum praecipue de luna plena eiusque pha-
sibus demonstrata dedi, nilominus a placitis
cel. virorum SMITHII & EVLERI differre Le-
ctores reperient, si §. 72. seqq. 101. 112. 1030.
1048. 1050. 1060. 1063. inter se conferre ve-
lint.

Instru-

P R A E F A T I O.

Instrumenta, quibus definiuntur colorum miscelae breuibus indicaui, cum viderem, ea delectationi potius quam theoriae luminis curatius euoluendae inferuire. Ex iis tamen, quae §. 1196. 1197. dixi, haud difficulter ista praxi adcomodabit, qui rei periculum facere gestiet.

His ita praenotatis pauca sunt, quae insuper monenda habeo. Primo enim facile obuium erit, valorem literae π , quam in calculis tantum non omnibus adhibui, duplicem esse, eamque in toto opere rationem inter peripheriam & diametrum circuli denotare, atque praeterea illuminationem absolutam breuitatis ergo fere ubique per π designari. Hanc equidem per unitatem efferendam esse dixeram §. 111, quippe per eandem unitatem exprimenda erat radiorum quantitas e spatio superficiei luminosae $= 1$ in spatium plani illuminati $= 1$ incidentium. At vero cum in toto fere opere spatia ista sumantur circularia, quorum semidiameter comodius per unitatem numerosque ipsi comensurabiles effertur, quam vero eius area, hinc vel sua sponte patet, cur illuminatio absoluta fere ubique prodierit $= \pi$ (§. 123.) atque quantitas radiorum in casu illuminationis absolutae $= \pi\pi$ (§. 124. 169. 175. 214. seqq. &c.) cum posito radio $= 1$, area circuli sit $= \pi$. Haec praenotanda erant, ne morarentur Lectores, quoque id fiat minus, meminisse iuuabit, unitates istas maxime esse arbitrarias (§. 43. 779.) unde vel per se euidens est, valorem istum ipsius π retineri iure meritoque potuisse. Quanam veroratione ipsi substituantur verae quantitates exemplis §. 733. 768. 964. 1227. 1233. &c. palam fit.

PRAEFATIO.

Porro quod passim notavi, experimenta photometrica adhucdum cuncta pendent a iudicio oculi. Unde si quis ea quae descripsi repetat, alioque modo videat, id mihi haud imputatum iri confido. Oculorum meorum aciem atque sensibilitatem, quantum in me fuit experimentis exploratam dedi (§. 255. seqq. 265. seqq.) atque insuper cautelas adiunxi, quibus usus sum. Generaliores in C. III. P. I. coaceruavi, specialiores hinc inde experimentis ipsis interferendas satius esse duxi, ut adeo & in his eo candore, qui Veritatis sectatorem, maxime decet, cuncta descripta reperiant Lectores. Sunt experimentorum plurima, quae primo intuitu dicto citius absolui posse videbuntur. At hoc ipsum dubium unius alteriusve horae spacium ipsis peragendis vix sufficere, facto rei periculo, docuit.

Mea quidem sententia ad veritatem hac ratione accedemus proxime tutoque gressu, si eadem experimenta a pluribus seorsim instituantur, atque porro ex cunctis medium sumatur eo modo, quem in C. III. P. I. descriptum dedi. Ita enim primo veritas a posteriori innotescet, atque hac inuenta de theoria curatius excolenda cogitare licebit. Aderunt data, quibus ad examen reuocabitur strictissimum. Porro sunt experimenta plurima, quibus institutendis defuit vel otium vel oportunitas. Eorum tamen rationem euolutam dedi una cum cautelis, quas necessarias esse praevidere poteram. Eiusmodi reperient Lectores §. 677. 1049. 1184. Ita quoque pluribus corporibus & pigmentis adplicari facile poterunt ea, quae in C. II. P. III. exposui. Sunt

P R A E F A T I O.

Sunt quoque capita quaedam, quae potius hypothefibus quam ipsis veritatis fundamentis superstruxi, veluti ea quibus de claritate athmosphaerae, de diluculo, de distantia & lumine Fixarum sermo est. Haec corollarii vel appendicis loco ceteris adnexa esse iudicent Lectores velim. Utique inter hypothefes quas *mathematicas* vocabo, & eas, quae *physicae* sunt, maxima adest differentia. Physicae ita plerumque assumuntur, ut qua in re a vero aberrant haud constet, unde fit ut suo quaeque ordine iterum reiiciantur, prout earum a vero aberratio successu tantum temporis detegitur. In mathematicis fere semper non modo constat, quam in parte a vero recedant, verum & plurimis casibus in antecessum definire licet aberrationis momentum. Ita v. gr. si quod in tractatu *Les routes de la lumiere* feci, parti curvae admodum parvae substituatur circulus osculator, si seriei maxime conuergentis abiiciantur termini primos sequentes, aberrationes quam proxime definire licet. Simili modo si fingatur formula experimentis proxime satisfaciens, erit ista hypothefis, qua frui tuto licet, donec ipsa veritas sese nobis spectandam sistat. Huius vero generis esse hypothefes, quibus passim usus sum, intuenti haud aegre fiet manifestum. Ita enim eam, quam dedi §. 425. seqq. non modo cum experimentis collatam, verum & ipsa eius criteria curatius euoluta Lectores videbunt §. 439. seqq. idemque & in Cap. II. P. IV. peractum esse reperient.

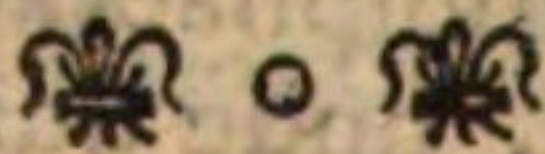
Claritatem athmosphaerae calculo definitam nondum vidi, unde quae de ea disserui,
mihi

PRAEFATIO.

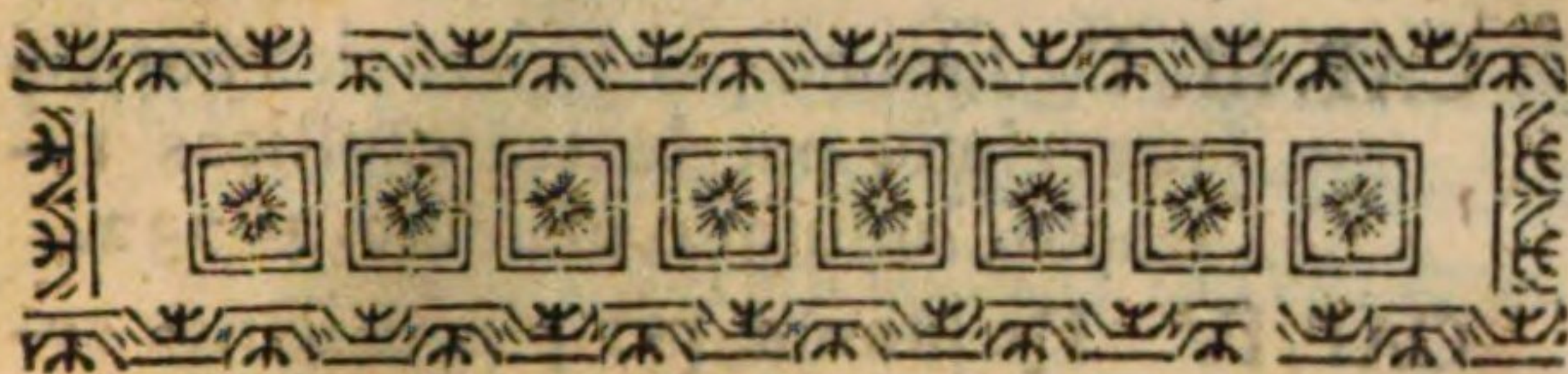
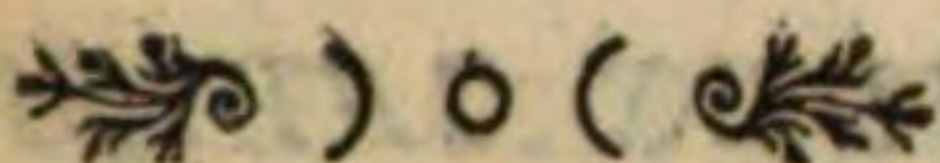
mihi saltem noua fuerunt, atque a primis initiis deducenda. Ipsa quoque rei difficultas, maximum geometris incitamentum, cum multifaria in aere adsit luminis reflexio, refraction, inflexio, dispersio, calculum ad amissim cum veritate congruentem, hactenus quidem plane respuere videtur. Distincta tamen certiora a minus certis, Lectores animaduertent, atque simul videbunt, pededentim me in re ista perquirenda esse progressum, atque hypothesium admissarum vim earumque pretium ex aequo definitum esse ex §. 901. 910. seqq. 916. 938. 949. 953. 956. facile diiudicabunt. Ita v. gr. series, quam exhibeo §. 879. ab omni hypothesis libera est, ea vero quam dedi §. 952. ab una tantum hypothesis pendet, qua inflexio luminis eius dispersionem in aere parum mutare ponitur.

Denique si quis a nouitate materiae, & iucunditate positionum & experimentorum, quae in hoc Photometriae Tentamine exposui, & a fructu, quem inde forsan capiet luminis theoria animum abstrahat, atque cui bono totum hoc opus sit, ex me quaerat, hoc unum adiungam, *Pyrometria*, quam curatius euoluendam suscepi, scopum huius libri primarium fuisse. Quanam vero ratione mensura luminis ad mensuram caloris & ignis quicquam faciat, & quis inter utramque sit nexus, hoc in ipso Pyrometriae opere, Deo adiuuante, ob oculos ponetur.

His interdum fruire, Lector beneuole,
& inceptis fauere perge.



INDEX



INDEX CAPITVM.

PARS I. Qua exponuntur modificationes
& gradus luminis directi eiusque cla-
ritatis & vis illuminantis.

CAP. I. Instituti ratio primaeque Photo-
metriae notiones & principia. pag. 1.

CAP. II. De lumine directo huiusque men-
sura & gradibus. p. 35.

CAP. III. Experimentis ad examen reuo-
catur oculi iudicium, primaque
firmantur Photometriae principia.
p. 105.

PARS II. Qua experimentis & calculo sub-
iiciuntur luminis modificationes a
corporibus pellucidis potissimum a
vitro pendentes.

CAP. I. Experimentis definitur quantitas
luminis a planis vitreis perfecte pel-
lucidis reflexi & refracti. Utraque
perlustratur calculo. p. 148.

CAP. II. Instaaurantur experimenta & cal-
culus pro tabulis vitreis minus dia-
phanis. p. 212.

CAP.

INDEX CAPITVM.

CAP. III. De lumine per superficies curuas praecipue per lentes causticas refracto, huiusque mensura. p. 232.

CAP. IV. De lumine per plures lentes refracto, vel ab eadem lente pluries reflexo & refracto. p. 263.

PARS III. Qua experimentis & calculo perlustrantur luminis modificationes a corporibus opacis pendentes.

CAP. I. De lumine a superficiebus corporum opacorum politis, potissimum a speculis reflexo, huiusque mensura & gradibus. p. 288.

CAP. II. Experimentis inter se conferuntur claritas luminis siue obiecti illuminantis, & claritas corporis opaci, quod ab eo collustratur, cuiusque superficies asperior est minusque polita. p. 321.

PARS IV. Qua calculo & experimentis definitur sensus luminis, huiusque claritas adparens.

CAP. I. Praestruitur calculus, quo definienda est claritas luminis ea, quae oculo iudice obiectis inesse videtur. p. 355.

CAP. II. Experimentis & calculo exploratur ratio, quam inter se seruant apertura pupillae & claritas luminis eiusque magnitudo adparens. p. 368.

PARS V.

INDEX CAPITVM.

PARS V. Qua inuestigatur dispersio luminis media diaphana, potissimum athmosphaeram telluris peragrantis.

CAP. I. Debilitatio luminis media minus diaphana potissimum aerem permeantis. p. 388.

CAP. II. Indagatur claritas, qua lumen in mediis diaphanis, potissimum vero in athmosphaera telluris dispersum, media ista spectanda exhibet. p. 403.

CAP. III. Traditur historia naturalis crepusculi, atque definitur, quo successu noctem detrudat dies diemque nox. p. 440.

PARS VI. Qua calculo subiicitur illuminatio systematis planetarii.

CAP. I. Calculo peruestigantur modificationes luminis lunaris. p. 458.

CAP. II. Computatur lumen, quo spectandos se sistunt Planetæ primarii. p. 482.

CAP. III. De lumine Fixarum, earumque distantia, p. 504.

PARS VII.

INDEX CAPITVM.

PARS VII. Qua exponuntur modificatio-
nes & gradus luminis heterogenei
& relatiui siue colorum & umbrae.

CAP. I. Experimentis & calculo peruesti-
gatur colorum claritas eorumque
differentia. p. 512.

CAP. II. Calculo definiuntur modificatio-
nes umbrae eiusque gradus. p. 537.



PHO-



PHOTOMETRIA

SIVE
DE MENSURA ET GRADIBVS
LUMINIS, COLORVM ET VMBRAE

PARS I.

QVA EXPONVNTVR
MODIFICATIONES ET GRADVS
LUMINIS DIRECTI
EIVSQVE CLARITATIS ET VIS ILLVMINANTIS.

CAPVT I.

Instituti ratio, primaeque Photometriae
notiones & principia.

§. 1.

Commune id esse videtur scientiae hu-
manae fatum, ut ea sint ab intellectu
remotiora, quae vel maxime obver-
santur sensibus. Huius certe nobis
effati praeclare sistit exemplum luminis theo-
ria.

ria. Plures enim eaeque grauissimae in per-
 vestiganda ipsius vi atque natura occurrunt
 difficultates vix ac ne vix superandae, ut mi-
 rum sit, in eadem re, quae fons est ipse clari-
 tatis, tanta adhuc cognitionem nostram cir-
 cumfusam esse caligine, tantasque in ipsa luce
 remanere tenebras. Arduam sane ni prorsus
 imperuiam in rebus physicis esse viam, quae
 ab effectibus ad eas procedit causas, quas ocu-
 lis subiicere non datur, ita est euictum, ut ne
 passum quidem faciamus, quin huius rei offen-
 damus exempla.

§. 2. Difficultates vero istae, ut primo sese
 offerunt meditati, ita ab eis ordiendum esse
 duxi hanc, quam prae me habeo, mensurae
 luminis theoriam. Omnia enim, saltem plu-
 rima deesse videntur adminicula, quibus in
 aliis rebus veritatis perscrutationem promo-
 vere, quantitatumque symptomata dimetiri li-
 cet. Deest physica luminis, siquidem demon-
 stratam rationibusque innixam desideraueris,
 theoria. Desunt, quibus lumen metiremur,
 instrumenta. Desunt denique prima, a quibus
 cetera deducerentur, principia. Et quod non
 minus his omnibus geometrae faceffit operam,
 dum singula inuenta connectere, suoque or-
 dine debite digerere cupit, ne in circulum in-
 currat logicum, vix sibi cauere potest.

§. 3. At vero ne nimis quam par est exag-
 gerare videar, quae iam in medium protuli
 obstacula, aequa lance sigillatim ista expendere
 conuenit. Theoriam luminis, quatenus ha-
 ctenus exculta est, huic scopo non sufficere,
 facile euincitur, cum quodnam Systematum,
 quae

quae de ea re haecenus in lucem prodire, amplectendum sit, qui nonnisi demonstrata admittere velit, dubius haereat. Etsi enim, ut cetera praetergrediamur, ea quae sibi finxerunt viri ingenii acumine praestantissimi, NEWTONVS atque EVLERVS, pro explicandis phaenomenis quam plurimis in usum vocari possint, *Eulerianum* certe cum ipsa rei natura vel maxime videatur congruere, id tamen in utroque adhuc dolendum est, quod instar principiorum pro eruendis novis phaenomenis nondum tuto adhiberi possunt, atque etiam si possent, nilominus in mensura luminis occurrere videmus casus haud paucos, quibus quae ratione alterutrum adplicari possit, nequaquam constat. Horum certe quosdam cum iam perspiceret NEWTONUS, quasi a difficultatibus deterritus, ita eos in dubio reliquit, ut ne experimentis quidem quidquam tentaret, cum theoriam prorsus videret ipsi fore defuturam.

§. 4. Equidem hisce hypothesium usum earumque pretium minuere nequaquam volo. Quod si enim ea, quae ad Systema quoddam pertinere prospicimus, ordine suo naturali proponere nondum liceat, ficto certe uti, ut quantum in nobis situm est confusionem vitemus atque obscuritatem, proficuum duco & necessarium. Accedit quandoque, quod eandem hypothesein, quam primo fictam saltem credebamus, cum eam solertius perlustramus, paulatimque ab erroribus liberamus, veram esse, aut veram tandem evasisse deprehendamus. Hac ratione Systema mundi indies magis magisque innotescere abunde constat. Neque

dubitandum theoriam luminis Eulerianam haud dissimili modo expolitum iri, etsi haecenus explicandis cunctis phaenomenis nondum sufficere videatur. Id enim inter praecipua atque certissima ponendum hypotheseos ad verum accedentis criteria, cum quis ex eo, quod condidit systemate, nouorum phaenomenorum praeuidere possit euentus, atque inde deducere positiones, quibus experimenta eum in finem instituenda adstipulantur. At nondum vidi hypotheses, quae haecenus de natura luminis excogitatae sunt, hoc sustinuisse examen, cum fatagendum sit, quo possint singulis accommodari phaenomenis iam notis.

§. 5. Etsi ergo defectus isti, quibus laborat physica luminis theoria maxime sint notabiles, ut impediri vix possit, quin magna ex parte & in Photometriam irrepant; attamen si fatendum quod res est, in hac parte longe erunt minores. Etenim Photometria non docet luminis naturam, quae a sensibus est remotissima, verum metitur eius vim atque claritatem, ceterosque ipsius effectus, qui sensibus vel maxime obuii sunt. Dudum vero iam notum est, grauitatis certe exemplo apertissime euincitur, mathematicam rerum naturalium harumque effectuum cognitionem a physica parum pendere, illamque citato passu promoueri mirumque in modum posse amplificari, etsi haec semper angustis contineatur cancellis.

§. 6. Neque tamen sperandum, Photometriam ideo cum theoria ponderis & motus grauium pari esse ambulaturam passu. Desunt enim, quod iam supra monuimus, instrumen-
ta,

ta, quibus mensuranda foret luminis in dato quovis casu, intensitas, quibusque vice lancis & moduli uti liceret. Quamvis enim infra varia descripta inuenias instrumenta photometrica, attamen eatenus saltem usui esse possunt, ut eorum ope luminis colorumque claritas in data ratione augeatur vel minuatur, usque dum claritati datae euadat ad sensum aequalis, oculo videlicet iudice. Eadem nempe etiamnum Photometria premitur difficultate, quae ante inuenta thermometra obstitit exactiori caloris mensurae. Optandum certe esset, ut excogitaretur *Photometrum* thermometro analogum, quod lumini expositum eius intensitatem atque claritatem indicaret. Enimvero ipse oculus nobis eius sistit exemplar, quippe pupillae apertura luminis sequitur magnitudinem ac claritatem, & utrique sese accommodat. At magnopere dubitandum artem in hoc negotio naturam posse imitari. Vix enim parabitur materia sensibilitate fibrillarum oculi gaudens, motuique luminis cedens, etiamsi huius claritas sit perexigua. Non me latet, hunc in finem sumpta fuisse a pluribus experimenta, quibus demonstrare conati sunt, motum luminis esse sensibilem, cum arena vel lamina chalybea foco lentis causticae vel speculi ustorii exposita, a vi radiorum solarium agitaretur. Merito enim dubitare licet, lumini an calori effectus iste adscribi debeat, atque etiamsi eum a solo lumine proficisci concedamus, cum tanta requiratur radiorum densitas, parua certe remanet spes, idem obtineri posse, ubi mensurandum venit lumen longe

debilius. Quodsi vero lumen sumatur solare, atque ponere liceat, huius calorem in eadem ratione minui vel intendi, qua minui & intendi potest eius densitas, thermometer utique photometri vices sustinere poterit. At nimis arctis eius usus circumscriptus erit limitibus. Quis enim ope thermometer luminis lunaris detegat claritatem?

§. 7. Quoniam itaque in definiendis luminis gradibus solus oculus est iudex, superest ut exponamus, quae & hic obstant, quo minus voti ex asse compotes fieri licet. Eadem nempe, de qua iam sermo nobis fuit, aperturae pupillae variatio iudicium nostrum de claritate luminis reddit incertum. Eo enim clarius videbitur lumen, quo maior est ista apertura, quoque adeo uberior datur lumini in oculum ingressus. Hoc vero fit, ut lumen clarius nobis minus videatur clarum ac foret eadem manente pupillae apertura. Accedit consuetudo, qua oculus paullatim & nocturnis tenebris sese adcommodat. Quale quid videmus in hominibus obscuris carceribus inclusis, qui nilominus singula obiecta discernere possunt, pededentim enim ipsis nervorum sensibilitas, a maiori lumine veluti hebetata, redire solet. Quod idem diluculum matutinum vespertino crepusculo reddere valet longe clarius, cum interdiu oculorum acies haud parum obtundatur.

§. 8. Utraque haec aberratio, quae oculi de claritate iudicium reddit incertius, simul aliud post se trahit incommodum. Ut enim oculi iudicium exactius definiri queat, oportet

teret aberrationis istius rationem habere, eamque in calculum inducere, ut inde cetera photometriae principia stabilire liceret. At si curatius in rem istam inquiramus, principiis hisce iam opus esse patebit, pro determinando errore, qui in iudicio oculi occurrit. Quomodo ergo hic vitari possit circulus logicus, si universam Photometriam omni rigore demonstratam desideraveris, ego quidem non video. Quod si vero ab isto rigore paullo recedamus, medium dabitur, positiones Photometriae ita connectendi, ut certitudine sua non careant.

§. 9. Antequam vero eo deueniamus, iuvabit prius oculi iudicium curatius examinare, idque cum iudicio ceterorum sensuum, maxime vero auris & sensus caloris comparare. Illud quidem ipsa requirit Photometria, quippe oculi nititur iudicio. Hoc vero examen, quod instituemus, non modo illustrabit, verum & uniuersaliorem reddet fructum, quem inde capere licebit.

§. 10. Sensus caloris ad grauiores nos deducit fallacias iudicii, quam oculus & auris, si caloris, luminis & soni spectes intensitatem. Calor enim & frigus, quatenus utrumque sufferre valemus, longe arctioribus circumscribuntur limitibus, quam lumen & sonus. Lumen enim a cimmeriis tenebris ad augustissimum solis splendorem usque per infinitos fere gradus, quos singulos adhuc discernere valet oculus, ascendit. Similia quoque sonorum intervalla ab aure discerni, neminem latet. Longe porro facilius eo nos deducit sensus caloris, ut eandem aeris temperiem frigidam

esse dicamus, quae, etsi non mutata, alio tempore calida nobis videtur. Opus certe fuit thermometro, antequam persuadere nobis passi simus, cellas profundas hieme & aestate eadem gaudere temperie, hancque ibi numquam mutari.

§. 11. Inuento thermometro iudicium nostrum de calore & frigore longe euasit certius, atque jam in nostra situm est potestate, gradum caloris producere dato gradui aequalem, independenter a iudicio sensuum. Huic commo simile at non aequale habet auris, dum ope instrumentorum musicorum tiliarum potissime & organi datum sonum quandocunque volueris iterum producere possumus. Quodsi vero ipsi aequalem producere desideraueris, auris certe iudex esse debet, paucis saltem casibus theoria adiuuante. Haftenus autem longe minus iuuatur oculus. Etsi enim varii generis lumina veluti e tenebris suscitare possumus, prout varia accendamus combustibilia, attamen eiusmodi claritas neque constans est neque conseruari potest ac iterum produci ut tubarum sonus. *Oculus ergo caret instrumentis & thermometro & organo analogis, sibi soli relictus iudicium ferre debet.* An ope luminis electrici claritas constantis gradus produci possit, ut oculus iuuaretur veluti auris, valde dubito.

§. 12. In calore nonnisi gradus distinguit thermometrum, prout vel intensiores sunt vel remissiores; Idem obtinet ratione sensus, at maxima est inter utriusque iudicium differentia. Dum enim thermometrum in aqua & aere eundem ostendit caloris vel frigoris gradum,

dum, manus aquam aere mox frigidiorē mox calidiorē esse putat. Lumen vero & sonus non gradu saltem sed & specie differre possunt. Illud quidem dum in multifarios dispe- scitur colores, quorum singuli clariores esse possunt vel obscuriores, dum maiori vel mi- nori lumine collustrantur. Eadem diversitas & inter sonos adest. Ut vero facilius disso- nantiam percipit auris, quam soni eiusdem in- tensitatem huiusque gradus, sic quoque di- versitas, quae inter colores varii generis adest, facilius ab oculo dignoscitur, quam eiusdem coloris varii gradus. Coloris enim species ab apertura pupillae tantopere non pendet quam gradus claritatis. Sermo vero nobis hic est de differentiis admodum exiguis.

§. 13. Corpus nostrum temperiei cuidam aeris assuefactum, dum ista mutatur, paulla- tim sese novae huic adcommodat temperiei, quod vel maxime observamus autumnō, cum novum irruit frigus. Huic ut assuefiamus ali- quot dierum opus est intervallo. Contra ea oculus paucis momentis cuivis claritatis gra- duī sese adaptat, si aperturam pupillae spectes. Secus enim est ratione motus tremuli fibrilla- rum & nervorum opticorum, quippe solem intuentes diu adhuc, & avertis a sole ocu- lis, eius videmus imaginem alternantibus co- loribus tinctam. Hic vero luminis in nervis opticis effectus ut plurimum tunc saltem sen- sibilis est, ubi lumen, quod adspeximus, vehe- menter est clarum. Simile quid & ratione au- ditus observamus.

§. 14. Quatenus inter colores prismatis atque tonorum unius octauae intervalla quaedam obtinet cognatio harmonica, oculus certe in hac re palmam praeripit auri. Quilibet enim color per se & absque ulla cum ceteris coloribus comparatione cognoscitur. Contra ea difficilior est sonorum distinctio, nisi instrumentis adiuvemur, vel iis iam dudum simus adsueta. Potius enim ex auditu cantus cognoscemus cantorem, cuius vocem iam aliquoties audiimus, quam vero notam quam cantat.

§. 15. Id quoque porro commune est omnibus sensationibus, ut fortior debiliorem supprimat. Sic in aprico vel nulla esse videtur candela claritas. Contra ea haec lumen istud, quod noctu diffundit lignum putridum, ita reddit invisibile, quasi nullum adesset. Facile ergo & hoc respectu erroneum euadit oculi iudicium. Interdiu chartam soli expositam aequae fere claram videmus ac lumen candela, cum noctu longe sit obscurior, ubi nonnisi a candela collustratur. In utroque tamen casu inter eadem obiecta instituitur comparatio. Ambo quoque ista interdiu a sole collustrantur, qui noctu iterum ab utroque abest.

§. 16. Expositis praecipuis oculi fallaciis, disquiramus oportet, qua ratione ipsis mederi possit. Diutius enim quibusdam videbor defectibus istis immoratus, quasi eiusdem scientiae quam hic tradere constitui, fundamenta prius conuellere totamque eam incertam reddere voluissem. At vero non improbatum iri
ab

ab aequis rerum arbitris hujusmodi institutum confido, quippe nequaquam mihi propositum erat, ea pro certis atque inuictis venditare, quae demonstratione adhuc indigere ipsemet praevidere poteram. Expedit sane in re physica prima ponderare principia, primasque probe evolueret notiones, antequam ad ea festinemus, quae inde fluere prono saepe alueo videmus. Hoc quippe modo ea quae certa sunt cognosces certa esse, dubia vero ulteriori subiicere dabitur examini. Plura sunt in Physicis, quae geometrarum more etsi demonstrari nequeant, nilominus certitudine aequae gaudent quam quae certissima. Utriusque vero huius certitudinis internoscere discrimen & utile erit & necessarium.

§. 17. Photometriam ceu alteram spectamus Optices partem. Primam eam dicimus, qua luminis tractatur via atque motus, huiusque variae quae dantur modificationes, phaenomena & usus. Prioris huius partis tractationi, cum iam plurima de ea prostant eaque praestantissima opera, non modo hic superfedere licebit, verum & cuncta ea praesupponere, quae de structura oculi, de via luminis, variisque instrumentis opticis & in vulgus notis ibidem dicuntur atque demonstrantur. Contra ea in altera hac parte, quam Photometriam inscripsimus, veluti ab ovo erit ordiendum, ubi de claritate luminis, de vi ipsius illuminante, de variis colorum & umbrae modificationibus sermo est. De his enim etsi iam passim quaedam in opticis scriptis reperias, nilominus convenit ista a primis veluti originibus

nibus repetere, ut qua ratione cuncta cohaereant perspicui possit.

§. 18. Ista vero luminis modificationes ut vel maxime oculo sunt obviae, atque proinde experiri eas utique datur, ita Photometriam quoque, ut eo euadat certior, experimentis superstruendam duxi. Theoriam enim singulis difficultatibus enodandis imparem esse, iam supra monui. Neque tamen eam prorsus reiciam, verum hinc inde demonstrationes tentabo, quibus ea quae experimenta docent, si non demonstrari saltem captui accommodari calculoque quodammodo subiici poterunt. (§ 4.)

Hasce porro demonstrationes ut plurimum adcommodabo utrique hypothese de natura luminis *Newtonianae* nempe & *Eulerianae*, quippe ceteris fere reiectis, harum alterutri Physici hodiernum tantum non omnes adhaerent. Prior certe captui, posterior forsitan naturae rei magis est adcommodata. Potissimum differunt ratione modi, quo lumen e corporibus lucidis emanat atque per totum Universum diffunditur. *NEWTONVS* radios ponit re ipsa e corpore lucente emanantes, & veluti eiectiones, ita ut massa corporis hac ratione continuo minuat. *EVLERVS* contra systema, quod olim excogitavit *CARTESIVS* polivit *HVIGENIVS* ita sistit immutatum, ut pluribus conveniat phaenomenis, potissimum vero luminis motui successivo eiusque in varios colores mutationi. Quem in finem lumen sono, materiam luminis aeri, corpus lucens corpori sonoro, colores denique variis, quibus in musicis utimur tonis tonorumque intervallis plane respon-

respondere & analogos esse statuit. Luminis & soni motum undulatorium ponit, quo illud per aetherem hic vero per aerem propagatur, illud a speculis, hic a muris similibusque obstaculis reflectitur. Vid. ejus *Coniectura physica circa propagationem soni ac luminis.*

§. 19. Tantas inter summos viros dirimere lites nondum datur. Occurrunt sane in Photometria experimenta haud pauca, quibus utrumque horum systematum adaptari potest facillime. Occurrunt vero & alia eaque gravissima, quibus neutrum facile adcommo- datur, quaeque instar lapidis lydii erunt, si utrumque ad examen reuocetur.

§. 20. Photometriae iam ut prima pona- mus fundamenta, ab experienciis ordiemur quotidianis omnibusque obuiis, quibus ad- struitur dari luminis varios gradus, variasque lumen pati mutationes, quibus eius alteratur claritas & species. Primae hinc deducuntur notiones, quas curatius indagare atque ab in- vicem discernere necesse est.

§. 21. Ita neminem spero fore qui neget, duas candelas plus illuminare quam sola; lumine admoto obiecti augeri claritatem; lu- men oblique incidens debiliorem producere illuminationem; dari lucem plus minusve cla- ram eandem tamen magnitudinem habentem; luminis eiusdem claritatem eandem videri vel parum mutari, siue maior siue minor sit eius ab oculo intuentis distantia &c.

§. 22. Singulas istas positiones experientia ita firmat, ut de earum veritate nullum re- maneat dubium. At vero probe notandum

ea omnia tantum ita nobis *videri*, ut adeo nondum inde concludere liceat, re ipsa quoque ista se sic habere. Saltum certe hunc si admittas circulum quidem euitabis logicum, de quo supra monuimus (§. 8.) At uterque cavendus est, si quidem rite desiderentur demonstrata Photometriae principia. Videndum ergo, quatenus fallaciae oculi eius in his experientiis iudicium dubium reddere valeant, quaque ratione dubio isti sit occurrendum.

§. 23. Quodsi vero unquam in re photometrica quicquam valeat axioma, hoc certe erit, cui cetera superstruemus: *Eandem nempe fore visionem, quoties idem oculus eodem modo adficiatur.* Hoc vero admissio, cum de eius veritate dubitari vix possit, varias inde fluere videbimus positiones, quibus utemur, cum experientiae ante prolatae examinandae erunt.

§. 24. Ut enim idem dici possit oculus, idem simul requiri videtur tempus idemque locus (§. 7.) eadem denique sit oportet luminis in oculum incidentis claritas & magnitudo, quippe ab utraque pendet pupillae apertura. Quae si secus fuerint, iudicium oculi, quod fert de aequalitate luminis vel claritatis, non adeo erit certum, quin maior desiderari merito possit certitudinis gradus.

§. 25. Similiter ut eodem modo adficiatur oculus, eadem necessario requiritur obiectorum, quae intuetur, magnitudo, distantia, claritas, eademque eorum positio. His utendo cautelis tantam iudicio oculi acquires certitudinem, quanta vel maxima esse potest. Quodsi enim hoc modo duo intuearis vel plura
objecta,

obiecta, eandemque singulis esse claritatem deprehendes, de veritate rei vel tutissime feres iudicium. Certitudinem saltem maiorem in hisce dari posse summopere dubitandum.

§. 26. Quoniam itaque verum erit oculi iudicium, cum de aequalitate claritatis duorum vel plurium obiectorum iuxta se positorum sententiam fert, tutissime ulterius progredi licebit, si ceteros casus, qui magis sunt compositi, ad primum hunc eundemque simplicissimum reducamus. Quod obtinebitur, simul ac dabuntur media, claritatem quamlibet ita augendi vel minuendi, ut datae claritati euadat aequalis. Prius vero inquirendum erit, quatenus quod de inaequalitate claritatis obiectorum iudicium fert oculus, admitti ceu verum possit.

§. 27. Intueatur itaque oculus duo obiecta luminosa iuxta se posita, eaque deprehendat inaequali lumine gaudere. Utique eodem utendo axiomatico (§. 23.) tuto concludemus, aut non esse eundem oculum, aut si idem est, aliter eum a quolibet obiecto adfici. Posterius caueri poterit ratione situs, magnitudinis & distantiae obiectorum, ut sola remaneat claritatis differentia. Quae si adest aperturam pupillae variam reddere quandoque potest. At si obiecta ita sibi sint vicina, ut oculus utrumque uno obtutu intueatur, patet pupillae contractionem utriusque obiecti lumini deberi. Cum itaque pro utroque aequae sit aperta, radii in oculum incidentes ratione quantitatis non mutantur, adeoque ratum utique erit eius de diuersitate claritatis iudicium.

§. 28. Insuper, quod infra fusius explicabitur, paucis tantum hic adnotabimus, variationem pupillae his casibus veritati iudicii, quod fert oculus nil officere. Id enim experientia constat, pupillae aperturam minorem esse, cum lumen fortius intuemur. Denegat ergo radiis luminis transitum, ut adeo debito minus clarum videatur. Nequaquam tamen ita eum denegat, ut duplo minor euadat apertura, cum lumen duplo est densius. Quod enim si locum haberet, singula certe obiecta aequae *viderentur* clara. Contra ea potius videmus obiecta, quae manifesto clariora sunt, oculi quoque iudicio clariora esse. Cuius rei in ferro ad excandescentiam usque paullatim incallescente exemplum habemus euidentissimum.

§. 29. Etsi ergo hinc pateat, oculum, dum duo pluraque obiecta iuxta se posita simul intuetur, de eorum claritate, an aequalis sit vel diuersa, rite iudicare, *non tamen inter gradus claritatis aliam dignoscere valet rationem praeter rationem aequalitatis.* Quod si vero diuersi fuerint claritatis gradus, quoties alter altero sit maior, hoc est quod oculi iudicium superat. Unde cum nobis adhucdum desint instrumenta, aliis utendum erit mediis. His nempe, quod iam monuimus (§. 6. 26.) obiecti alterutrius claritas ita augenda vel minuenda est, ut non modo claritati alterius euadat aequalis, verum & innotescat, quoties claritas ista aucta vel imminuta sit. Aequalitatem obtinere oculus iudicare debet, incrementi autem vel decrementi quod claritas ista cepit, mensura e Photometriae principiis eruenda.

§. 30.

§. 30. Cum diximus, oculum de ratione aequalitatis inter duas claritates iudicare posse, hoc certe non intelligendum erit, quasi geometrico rigore & absolute aequales essent. Ad hanc tamen aequalitatem proxime accedere claritates, quas oculus aequales iudicat, utique assumere licebit. Semper enim minuta adest differentia, quae aciei oculi sese subducit. Experimentis vero, quae infra occurrant, patebit differentiam istam valde esse exigua meritoque pluribus casibus contemnendam.

§. 31. Duplici vero modo utendum erit isto oculi iudicio. Quod si enim legem quandam, quam ex principiis vel assumtis hypothesebus eruimus, quaeque varios luminis gradus pro datis circumstantiis exhibet, examini experientiae subiicere velimus, hoc certe casu sufficit oculi iudicium etiamsi proxime saltem verum. Etenim hoc tantum nobis propositum est, ut disquiramus, an lex ista cum experientia coincidat nec ne? Quo casu certe sufficit ad sensum eam coincidere.

§. 32. Contra ea exactius requiritur oculi iudicium, maiorque *ακρίβεια*, ubi luminis cuiusdam claritatem definire eamque cum claritate data, quae instar moduli assumitur comparare volumus. Quo enim curatior erit haec comparatio, eo propius ad veritatem, quam quaerebamus, accedimus.

§. 33. His ita praestructis ad specialiora deueniamus. Statim enim primae sese offerunt Photometriae notiones distinctius euolvendae, ut quae in claritate luminis eiusque

vi illuminante diuersa sunt, verbis quoque ab inuicem distinguantur, & suis quaeque nominibus designentur.

§. 34. Quod si ad usum loquendi attendamus, *luminis* ideam utique valde vagam esse deprehendimus. Dantur enim corpora, quae per se luminosa sunt, proprioque lumine gaudent. Sunt & alia longe plurima mutuato saltem lumine visibilia. Quae prioris sunt generis iis utique *luminis* nomen competit, qualia sunt sol, candela, flamma ignis materiaeque electricae. Huc quoque referas stellas fixas, lignum putridum, vermes & muscae noctu lumen etsi tenue visibile tamen diffundentes. Quae posterioris generis sunt corpora, horum quaedam usus loquendi lumina vocauit, potissimum ea, quae dum maius lumen plane abest, eius vicem sustinent, & obiecta visibilia reddunt. Inter haec eminet luna ceterique planetae, atque interdiu ipsum coelum, quatenus eius claritas in aedes irruit, camerasque collustrat, ut visibilia euadant, quae in aedibus sunt. Neque opus est corpora ista continuo nobis sint vice luminis. Sic enim & interdiu flammam lumen esse dicimus. Sufficit enim quandoque corpora ista lucis sustinere vices. Cumque plurima istiusmodi corpora, quibus *luminis* nomen damus, albida sint, hinc est, ut flammam sulphuris caeruleam lumen caeruleum esse dicamus, ut adeo & hoc respectu lumen a coloribus parum differat; hoc saltem intercedit discrimen, quod lumen coloratum minus sit frequens.

§. 35. Cum itaque id tantum lumen esse dicamus, quod obiecta vel semper vel quandoque reddit visibilia, patet hanc denominationem a claritate non pendere. Alias enim charta alba in aprico posita lumen esset dicenda, cum aequae clara sit ac candelae flamma, cui certe luminis nomen nemo non tribuit. Cetera obiecta omnia, quae oculo obuia sunt, quatenus ea videmus, *illuminata* esse vel mutuo lumine gaudere dicimus. Quod si vero & haec quandoque obiectorum claritatem augere videmus, veluti cum murus albus lumen in cameram proiicit, tunc *lumen inde reflecti* iudicamus.

§. 36. Hac loquendi consuetudine proxime in Photometria uti licebit paucis mutatis. Distinguenda utique est claritas luminis, quod obiectum collustrat, a claritate obiecti ab eo illuminati. Eatenus nempe lumini tribuemus *vim illuminantem* siue *splendorem*. Claritatem vero quam in obiecta diffundit *illuminationem* vocabimus.

§. 37. Porro distinguenda venit luminis claritas, quatenus videtur oculis, a claritate eius, quatenus obiecta collustrat. Illam dicemus *claritatem visam*, haec vero si ad corpus luminosum referatur, erit *vis illuminans*, sin ad obiectum *illuminatio* dicetur, quemadmodum iam innuimus. Maxima vero inter claritatem visam & illuminationem est differentia, ut mirum sit, Cel. WOLFIVM utramque perperam confudisse, cum in Optica ait, obiecta remotiora ideo minus clara videri, quod lumen *decrescit* reciproce ut quadratum distantiae.

Loquitur vero de *claritate visa*, de qua perperam affirmatur haec positio, cum nonnisi de *illuminatione* locum habeat. Similiter passim claritati visae planetarum tribui inuenies quae illuminationem tantum spectant. Quanta vero inter utramque sit diuersitas, suo loco ostendetur.

§. 38. Similiter in quolibet corpore luminoso distinguenda venit eius magnitudo cum vera tum adparens, eadem enim & lumini duplici hoc sensu conuenit, cuius quippe volumen, manente claritate, augeri minuiue potest. Hinc nascitur idea de luminis *magnitudine vera & adparente*. Prior absoluta est, posterior a priori simulque a corporis pendet distantia & situ.

§. 39. Contra ea, manente corporis luminosi magnitudine & distantia, eius claritas per infinitos augeri minuiue potest gradus. Huc referas exemplum de ferro ad excandescentiam usque calefacto supra iam allatum (§. 28.) similique modo chartam a candelis illuminatam, quarum numerus augetur vel minuitur, vel eandem chartam candela propius admotam, vel longius ab ea remotam. Diuersam hanc eiusdem corporis claritatem, si ad ipsum corpus luminosum referatur, vocabimus *intensitatem luminis vel densitatem radiorum*. Hac ratione solem lumen esse dicemus intensissimum, cum maxima in eo sit radiorum densitas.

§. 40. Claritatem, qua gaudet corpus, quatenus illuminatur, illuminationem vocauimus, nulla amplius superaddita distinctione. Quod si enim occurrant casus, ut baud raro solent, quibus corpus

corpus mutuato saltem lumine gaudens luminis vices sustinet, aliaque iterum corpora collustrat (§. 34.) bis casibus omnia de eo valebunt, quae de corpore luminoso diximus.

§. 41. Alia insuper datur aequiuoca luminis denominatio, adhuc curatius definienda. Lumen enim quandoque & ipsum corpus luminosum vocamus, quandoque vero claritatem quam eiusmodi corpus circumcirca diffundit. Posteriori hoc casu lumen *emanare* & per immensa spatia *propagari* dicimus. An vero tantum propagetur eius claritas siue effectus, quod statuit EVLERVS, vel an cum isto effectu simul e corpore luminoso emanent particulae luminis, quod NEWTONO magis aridet, in dubio hic linquimus (§. 5.) Utraque absque ullo erroris periculo in Photometria uti licebit phrasi, cum euidentissime demonstratum sit, lumen non modo moueri, verum & successiuum esse eius motum, unde adeo perinde erit, siue lumen cum particulis siue absque iis e corporibus emanare dicamus. Idem sane erit effectus, cum is esse debeat, qui experimentis congruat.

§. 42. Dum vero lumen e corpore luminoso emanat *radius* audit. Radius secundum NEWTONVM est series particularum luminis sibi subsequenterum & recta e corpore lucido emanantium, EVLERO vero idem est ac unda aetheris recta propulsa, sonique vndis in aere analogae. Utcunque autem nobis radiorum fingamus naturam atque indolem, si effectum spectes oculo vel maxime visibilem, utique concedendum erit, eum duplici modo consideran-

derandum esse, cum radiorum densitas ab eorundem quantitate necessario sit distinguenda. Nobis certe sufficiet vulgarem radiorum ideam retinere, quam sequentem in modum ab ineunte aetate acquirimus.

§. 43. Incidat lumen v. g. solare per foramen quoduis in cameram probe clausam & obscuram, videbuntur particulae & puluisculi aeri innatantes a lumine collustrati viam qua lumen progreditur clarissime denotantes. Totum istud spatium aeris recta a foramine ad fundum usque camerae protensum, quatenus lumen istud permeat, radium luminis vocamus. qui cum eo magis extenuetur, quo arctius clauditur foramen, hinc idea nascitur, radium istum ex pluribus aliis esse compositum. Quare eundem successive diuidendo ideam inde nanciscimur radii simplicis & velut infinite tenuis. At vero hic haeret aqua, cum ulterius progredi nequeamus. Neque id Photometria requirit. Sufficiet enim radium compositum, qualem antea descripsimus, curatius inuestigare. Hunc in finem ponamus eiusmodi radium excipi charta alba, ita ut normaliter in eam incidat, atque patet chartae quoddam spatium a radio isto illuminatum iri. Manente iam chartae a foramine distantia & situ, augeamus foraminis aperturam, atque palam est, spatium istud illuminatum simili ratione augeri. Uberior enim iam lumini datur ingressus, siue ut phrasi utar tritissima, plures in chartam incidunt radii. En igitur radiorum quantitatem. Etsi ergo analysis radiorum luminis eousque non sit promota, ut qualis sit radium
dius

dius simplex inde deducere possemus, nil tamen obstat quo minus, ut ita loquar, fasciam radiorum ceu unitatem spectemus quantumvis arbitrariam, hacque unitate radiorum copiosiorum exprimamus quantitatem.

§. 44. At iam, eadem manente chartae positione, atque apertura foraminis, in locum solis substituamus lunam plenam, cum eadem gaudet magnitudine adparente, utique idem, quod in priori casu, illuminabitur chartae spatium, at quanta aderit claritatis differentia! Plures igitur priori casu in idem chartae spatium incidisse radios utique concludendum est, cum iam multo debilior sit chartae claritas. En ergo alterum, radiorum nempe *densitatem* siue *intensitatem*. Densiores itaque dicendi sunt radii, ubi plures in idem spatium incidunt. Manente vero densitate, plures erunt, ubi maius collustrant spatium.

§. 45. Populari hac radiorum idea & differentia in sequentibus frequentissime utemur, eam igitur fusius explicasse non piget. Quaecunque enim in prima Optices parte de via luminis demonstrantur, hac fere nituntur radiorum idea, hoc tantum intercedente discrimine, ut cum ibidem viae luminis habeatur ratio, radii per rectas exprimantur. Contra ea in Photometria luminis linearis exiguus est usus, quippe hic spectatur, quatenus superficiem collustrat.

§. 46. Primariis iam Photometriae notionibus fusius enucleatis ad eas reuertemur experientias, quas supra breuibus indicauimus

(§. 21.) Diximus vero, quod & vulgo notissimum.

- 1°. Duas pluresue candelas plus illuminare quam unica.
- 2°. Obiectum lumini propius admotum clarius fieri.
- 3°. Lumen oblique incidens in superficiem, eam minus illuminare.

Quaeritur iam, quamnam illuminationis istud augmentum vel imminutio in singulis his casibus sequatur legem? Haec enim cum innoverit, dabitur modus idemque multiplex luminum quorumcunque claritatem inter se comparandi.

§. 47. Equidem facile praevideri potest, data lege pro unico trium istorum casuum, ceteros experimentis definiri posse. Sic enim v. c. prima assumpta, augeri nempe illuminationem in eadem ratione, qua augetur candelarum numerus, dabitur medium producendi claritatem duplam, triplam, quadruplam &c. Hinc vero facillime definietur distantia luminis cuiusdam, qua illuminatio dupla, tripla &c. euadit. Eodemque modo definientur anguli incidentiae, sub quibus obtinet claritatis pars dimidia, tertia &c.

§. 48. Ut vero quicquam in hac re definia-
tur, alias experientias in subsidium vocabimus,
quarum ope leges istas definire licebit. Ob-
iecti cuiusvis singulas partes visibiles esse, qua-
cunque te vergas, nisi ab aliis operiantur abun-
de constat. Hinc iure meritoque dudum iam
intulerunt, particulam quantumvis parvam su-
perficie corporis luminosi, quaquaersum ra-
dios

dios suos dispergere, unde porro *puncti radiantis* nata est idea. Radios ergo, qui e simili puncto quaquaversum emanant, veluti e centro *diuergentes* nominarunt, eosque adeo pro ratione maioris a centro distantiae, *rariores* fieri, siue densitatem eorum decrescere statuerunt. Nec sine ratione. Concipiamus enim duas superficies sphaericas easque concentricas circa punctum radians descriptas. Euidens est, eosdem radios utramque istam peragrarere superficiem. At in superficie sphaerae maioris per maius spatium diffunduntur, unde utique minor est ibi radiorum densitas. Cumque in genere densitas ista censenda sit esse ut numerus radiorum per spatium diuisus, consequens est, *densitatem hoc casu decrescere ut sphaerarum superficies, adeoque reciproce ut quadratum distantiae a puncto radiante.*

§. 49. Hanc demonstrationem aut similem in omnibus Optices institutionibus inuenies, ut adeo ipsi diutius immorari superfluum sit. Cunctis enim respondet luminis phaenomenis, atque abunde confirmari potest experimentis.

§. 50. Lumen lumini, dum per eundem locum transit, non obesse, adeo est manifestum, ut probatione non indigeat. Admiranda sane est radiorum luminis per totum uniuersum disseminatio, cum singula obiectorum puncta radios suos quaquaversum diffundant, eaque ubique locorum oculo reddant visibilia. Admirandus quoque infinitorum radiorum per foramen quantumuis exiguum simultaneus transitus, cum eiusmodi foramine, lamina nempe metallica siue charta vel tenuissima acicula

pertusa, oculo propius admoto, singula simul obiecta uno obtutu per angustissimum istud foramen cernere liceat. Quod idem si camerae obscurae adplicetur, singula obiecta exteriora intra eam, radiis charta alba exceptis, spectanda exhibet.

§. 51. Miranda hac radiorum proprietate, magna ex parte nititur lex altera, *chartae nempe illuminationem eo esse maiorem quo maior est numerus candelarum, a quibus collustratur, si quidem aequali eas gaudere claritate, aequali a charta distantia aequali denique magnitudine ponas.* Cum enim lumen alterum alteri non officiat, patet quotlibet novis superadditis candelis, aequales quoque chartae superaddi claritatis gradus. In genere enim vi simplae additur dupla tripla &c. prior non destructa.

§. 52. Quodsi iam in locum candelarum aliud substituamus lumen, aequae clarum, cuiusque magnitudo adparens sit summae magnitudinis adparentis candelarum aequalis, eandem hoc in charta producet claritatem. Ut adeo quod iam dudum statuerunt Optici, assumere utique liceat, *illuminationem eo maiorem fore, quo maior est superficies corporis illuminantis, eadem nempe manente distantia, eodemque luminis splendore.* Superficiem vero hic, quod probe notandum, sumimus adparentem. Aliter enim rem sese habere, si gibba fuerit, siue si verae eius figurae rationem habeamus, suo loco ostendetur.

§. 53. Simili porro modo tertiam quoque legem definierunt Optices scriptores, quae obliquitatem incidentiae spectat. Etenim mi-
norem

norem esse radiorum numerum, cum oblique in eandem incidunt superficiem, facile euincitur, unde non possunt non rariores esse. Necessse igitur est, chartam minus illuminari. Claritytatem vero decrescere in eadem ratione, qua decrescit sinus anguli incidentiae, sic demonstratur. In planum AB incident radii paralleli intra parallelas CA , DB sub angulo $CAF = DBF$. Ponamus iam eosdem radios excipi plano AE ad directionem radiorum normali. Patet eundem radiorum numerum a plano AE intercipi, qui antea intercipiebatur a plano AB maiori altero. Densiores itaque sint oportet in AE quam in AB . Quare cum densitas sit ut radiorum numerus per spatium, in quod incidunt, diuisus, idem hic radiorum numerus priori casu diuidendus erit per AB , posteriori autem per AE , adeoque densitas in AB erit ad densitatem in AE reciproce ut istae rectae, siue directe ut AE ad AB . Quod si iam AB spectetur ut radius vel sinus totus, erit AE sinus anguli incidentiae. Quare *illuminatio normalis erit ad illuminationem obliquam ut sinus totus ad sinum anguli incidentiae*. Eo igitur minor erit quo minor est anguli incidentiae sinus.

Fig. 1.

§. 54. En ergo demonstrationem trium istarum legum, quibus definitur illuminationis in dato quouis casu alteratio & gradus, quas in omnibus, qui de re optica scripti sunt libris inuenias. At si dicendum quod res est, nulla earum seorsim experimentis firmatur, cum, quod iam supra vidimus, oculi iudicium, quo hic opus est, ultra rationem aequalitatis non admitti

admitti ceu certum possit. (§.7.11.29.) Illuminetur enim charta a candelae lumine. Huic iungatur alia, in quam duae candelae radios suos diffundant. Hanc certe priori videbis longe clariorem. An vero dupla sit claritas, ratiocinio quidem instituto praesumis, oculo vero certo diiudicare nequis. Simili modo chartam a candelae lumine remotiorem obscuriorem esse videbis altera, quae lumini propius est adnota. At quanta praecise sit inter utramque claritatem differentia, quaenam ratio, hoc certe dubium oculus non soluit. Eodem modo lumen obliquius incidens obscurius videbis, metiri claritatis decrementum oculo solo adiuuante non poteris. Undenam ergo positionum istarum certitudo, si quod aiunt a posteriori desideretur?

§. 55. Equidem in promptu est methodus, legum istarum quamlibet cum ceteris, experientia duce, comparandi, unde euincetur, altera earum ceu vera admissa, ceteras quoque veras fore, ut adeo communi quasi nectantur vinculo, quo sese vel mutuo probant, vel destruunt. Etsi enim singulae ex eodem luminis conceptu eodemque vel maxime uaturali deductae sint, attamen cum in physicis paralogismo nil sit facilius nil quoque frequentius, hi, qui in scientiis demonstrandis summum desiderant rigorem, a circulo logico, quem hic subolere sibi putabunt, cauendum esse clamabunt.

§. 56. At si quid ego in re physica video, huiusmodi in demonstrationibus physicis rigor aut rarissimus est aut nusquam habet locum.

cum. Ea enim vel maxima erit certitudo, cum legem quandam ita cum singulis phaenomenis congruere videmus, ut quousque extendantur experimenta, nullis tamen eorum contradicat aperte, cum omnibus cohaereat optime. Hanc vero esse trium istarum legum indolem, per totum hoc Photometriae opus ita comprobatum videbis, ut dubium remanere possit nulum.

§. 57. Ne vero & hic desideretur huius effecti demonstratio, agedum videamus, qua ratione sumtis experimentis legum istarum altera alteram probet.

EXPERIMENTVM I.

§. 58. Tabulae A B C in A insistant duae Fig. 2.
candela aeque clarae, in C D erigatur planum album vel charta ita ut radii ex A normaliter incidant in partem plani B G F D. In H I ponatur planum aliud minus latum, sic ut umbra ab utraque candela in A procedens obtegat partem plani posteriorem D F E C. Ex altera parte in K ponatur tertia candela aeque clara ac praecedentes, hac conditione, ut ab umbra quam inde proficit planum H I obtegatur tantum pars anterior plani D F G B. Hac ergo ratione pars anterior B G F D a duabus, posterior vero ab unica candela illuminabitur. Qua seruata conditione candela K ad planum B E admoueatur vel ab eo remoueatur, usque dum utraque pars D G & D E aeque videatur illuminata. His factis sumatur candelarum a plano B C distantia, atque erit A B ad K C ut $\sqrt{2}$ ad 1. siue inuertendo, quadratum distantiae
A B

A B deprehendetur esse ad quadratum distantiae K C ut 2 ad 1, siue uniuersaliter ut numerus candelarum in A ad earundem numerum in K. Eodem enim modo pluribus sumtis candelis repeti poterit experimentum. Eo vero exactius erit, quo magis singulae candelae & magnitudi^{dine}e & claritate fuerint aequales.

EXPERIMENTVM II.

§. 59. Idem quod modo descripsimus experimentum unica tantum relicta candela sed adhibitis speculis planis, sic institui poterit. Posita nempe candela in K, ipsi ita admoueat^rur planum H I, ut eius umbra totum planum B E obtegat. Quo facto in L duo vel plura specula pone candelam ita ponantur, ut singula lumen reflectant in partem plani B G F D. Specula vero ista a candela aequae sint remota, sibi vero inuicem proxima. Sumto iam alio speculo, ponatur istud ita, ut lumen candela^e, cui propius sit, in partem plani D F E C proiciat, hancque solum aequae collustret, ac pars G B F D a duobus istis speculis collustratur. Constat vero ex Catoptriciis, eandem fore illuminationem ac si candela in eo loco esset posita, ubi in experimento isto inuenitur esse eius imago, quae pone speculum aequae ab eo distat, ac candela. Sumenda itaque erit speculorum a plano B E distantia, huicque addenda est eorundem distantia a candela. Quo peracto deprehendetur esse quadratum summae distantiarum (L G + L N) ad quadratum distantiarum (M E + M N), ut numerus speculorum in L ad numerum speculorum in M, si qui-

si quidem in utroque loco plura fuerint posita.

§. 60. At iam demonstrandum erit, assumpta lege §. 51. 52. his experimentis probari legem §. 48. & vicissim. Primo quidem experimento euincitur, eandem fore illuminationem, ubi quadratum distantiae candelarum fuerit ut earum numerus. Eo ergo minor est claritas cuius candelae debita, quo maior est hic numerus (§. 51. 52.) adeoque & quo maius quadratum distantiae. Quare erit reciproce ut hoc quadratum.

§. 61. Addimus analyticam huius positionis demonstrationem. Sit numerus candelarum in $A = n$, illuminatio inde nascens $= I$, quam ponamus constantem, erit per hypothesin illuminatio cuique candelae debita $= I:n$, quam faciemus $= c$, ut sit $c = I:n$. At per experimentum est $n = \text{quadrato distantiae}$, qua dicta $= d$, erit $n = d d$, adeoque ob $c = I:n$, erit $c = I:d d$, siue ob $I \text{ const. } c \propto 1:d d$. Eodem modo procedit demonstratio, secundo adhibito experimento, si in vicem candelarum substituamus candelae imagines, quas specula exhibent.

EXPERIMENTVM III.

§. 62. Rectae A B insistat planum album. In C ponatur candela unica vel plures, in D vero aliae numero plures quam in C. Denique in E F erigatur planum opacum quod umbram candela C proiciat in B, candelarum D autem in A. Quo facto is quaerendus tentando candelarum situs, quo a punctis illuminandis

Fig. 3.

nandis A & B aequae distant, planumque ibi aequae illuminent. Quo reperto, mensurantur anguli incidentiae C A B, D B G, atque horum sinus deprehenduntur esse in ratione numeri candelarum in C & D. Hoc experimento euincitur, legem utramque §. 51. 53. ab inuicem pendere, atque sese mutuo probare.

EXPERIMENTVM IV.

§. 63. Posita iterum candela in C, altera priori & claritate & magnitudine aequalis super recta B D ita ponatur, ut planum in A & B aequae illuminetur, v. g. in H; atque reperientur sinus angulorum incidentiae reciproce esse ut quadrata distantiae candelarum a punctis A & B. Et hoc iterum experimento probatur legum §. 48. 53. congruentia, qua altera alteram firmat. Utrumque hoc experimentum & speculis absolui posse, vel me tacente, quilibet facile perspicit.

§. 64. Plura adhuc & ab his, quae iam in medium protulimus, diuersissima dantur experimenta, quibus leges istae inuicem firmari possunt. At cum principia, quibus innituntur, in sequentibus tantum euoluere liceat, eousque eorum descriptio erit differenda. Descriptis interim ita fruamur, ut modum ostendamus, quo illuminationes inter se conferri diuersissimae possunt. Sic enim in antecessum parabuntur media, quibus posthac utemur, cum varii illuminationis gradus erunt definiendi.

§. 65.

§. 65. Ex dictis iam evidens est, pluribus casibus in potestate esse, illuminationem quamlibet ita immutare, ut non modo datae illuminationi euadat aequalis, verum & innotescat, qua ratione quantumque aucta vel immutata sit. Quod si enim vel luminis a charta siue plano illuminato distantia, vel huius positio mutari possit, utique illuminationem cuicunque datae aequalem reddere dabitur. Immutata enim illuminatio semper erit directe ut sinus anguli incidentiae, reciproce ut quadratum distantiae.

§. 66. Comparanda sit v. c. illuminatio chartae a luna cum eiusdem illuminatione a candela proveniens. Facile iam patet pluribus id fieri posse modis. Ita vero, qualicunque utaris, charta & lunae & candelae exponenda est radiis, ut ea pars quae a luna collustratur, obiecto quodam interposito, radiis candelae subducatur, & vicissim. Qua servata lege, vel angulus incidentiae, vel candelae distantia augeri minuiue poterit, usque dum utraque pars chartae aeque videatur illuminata. Similique modo & pluribus adhibitis candelis, illuminationem chartae ab eis productam cum illuminatione lunae vel alius cuiusvis luminis comparare licebit. At, probe notandum, his experimentis nondum inueniri rationem inter ipsorum luminum claritatem, neque comparari posse claritatem chartae illuminatae cum claritate corporis luminosi, quod eam collustrat. Prius tamen facilius assequi licet, si non modo obliquitatis incidentiae, verum & magnitudinis adpa-

C

rentis

rentis habeatur ratio. At his omnibus infra
fufius explicandis erit locus.

Fig. 4. §. 67. Supereft, ut quasdam adhuc euol-
vamus notiones, quas interfe diftinxiffe in
fequentibus iuuabit. Iam notauimus ex quo-
vis puncto fuperficiei luminofae quaquauer-
fum emanare radios. Sit igitur eiusmodi fu-
perficie AB, cui obuertatur alia CD ab ea
colluftranda. Ex quouis ergo puncto E qui
emanant radii in totam feffe diffundunt fupe-
ficiem CD. In fequentibus quandoque oc-
curret, ut eorum colligatur fuma, ut &
fuma claritatis, quam in CD, ratione ha-
bita diuerfitatis diftantiae & anguli inciden-
tiae, producere valent. Quare conuenit eos
hocce refpectu a ceteris radiorum modifica-
tionibus diftinguere. Eos itaque *radios e puncto
difperfos vel diuergentes* vocabimus.

§. 68. Contra ea in quoduis punctum F
fuperficiei CD e fingulis fuperficiei AB pun-
ctis incidunt radii, quorum denfitas illumina-
tionis gradum conftituit eum, qui fuperficiei
luminofae AB debetur. Et horum quoque
radiorum ampliffimus in fequentibus erit ufus.
Quare ut a ceteris diftinguantur, eos vocabi-
mus *radios in datum punctum coincidentes*.

§. 69. Alia infuper occurrit diftinctio uti-
que notanda inter puncta, fiue lucida fint fiue
illuminata. Aut enim ifta confideramus ve-
luti folitaria, hucque referas *puncta radiantia*
proprie fic dicta, quae veluti in vacuo fola
conciipiuntur, lumen quaquaverfum libere dif-
fundentia. Aut puncta ifta fpectamus tam-
quam partem fuperficiei, qualia in § praee-
dente

dente erant puncta E, F. Quae ut a prioribus distinguantur *puncta superficiei* nominabimus. Ceterum quod de iis in genere notandum, ista nequaquam consideramus ceu puncta geometrica, quippe quae omni carent extensione, verum ut puncta physica, quae vel unam, vel duas, vel denique tres habent dimensiones quantumvis exiguas, prout pars sunt vel lineae, vel superficiei vel corporis. Recepta iam est in opticis ista notio, neque in errorem inducet, cum quid sibi velint, hic praemonemus. Geometrica erunt, simul ac demonstrata fuerit luminis in infinitum non modo diuisibilitas verum realis divisio. Nobis sufficiat ea hic spectare velut infinite parua. Ceterum & aliis utemur loquendi modis magis genuinis, & in geometricis receptioribus, quoties vitanda est vel obscuritas vel amphibolia.

CAPVT II.

De lumine directo, huiusque mensura & gradibus.

§. 70. Quas in praecedenti capite discussimus, positiones, quibusque iam utemur, hae fere sunt: Illuminationem nempe vidimus decrescere reciproce ut quadratum distantiae (§. 48.) directe vero ut sinum anguli incidentiae (§. 53.) eandem vero esse maiorem, prout maior fuerit luminis, quae obiecto illuminato obuertitur superficies (§. 52.) quoque denique intensior, qui

proprius est lumini, splendor (§. 39.) Conditiones vero istae, a quibus singulis pendet illuminationis gradus, ut infinitis fere modis esse possunt diuersissimae, ita totidem quoque inde existunt illuminationis modificationes, quarum praecipuas veluti species hoc capite ita perlustrabimus, ut quae inde fluunt theoremata in sequentibus Photometriae partibus principiorum instar esse possint.

§. 71. Antequam vero eo deueniamus alia eaque grauissima enodanda est quaestio parum adhuc ventilata. Vidimus illuminationem pendere a situ superficiei illuminatae, eamque minorem esse, ubi maior fuerit radiorum luminis in superficiem istam incurrentium obliquitas, siue ubi minor obtinet angulus incidentiae. Ut adeo non perinde sit, qualis superficiei illuminatae sit situs, qualisque ad radios incidentes inclinatio. At iam quaeritur, an secus res se habeat ratione situs ipsius superficiei luminosae, quae radios suos in obiectum diffundit. De his altum apud auctores plerosque qui de illuminatione obiectorum scripserunt reperies silentium. Unus est, ni fallor, Cel. EVLERVS, qui naturam luminis maiori rimatus *ακρίβεια*, maiori que ingenii acumine, huius quoque circumstantiae rationem habuit, eamque, cum in claritatem Planetarum curatius inquireret, in calculum induxit. Vid. eius *Reflexions sur les divers degrés de lumière du Soleil & des autres Corps celestes*, in Commentariis, qui inscribuntur. *Memoires de l'Academie de Berlin.*

§. 72. In elaboratissima ista dissertatione, Cel. hic Auctor, siquidem probe eum intellexi, diserte ait, perinde esse superficiei luminosae situm, atque eandem prodituram fore illuminationem, utcunque radii oblique emanent. Hinc eam esse statuit illuminationem corporis a Sole collustrati, quae prodit, si dimidia eius superficies quae nobis est visibilis, in superficiem planam extensa concipiatur, solem adeoque collustrare non ratione disci plani, verum ratione areae superficiei verae, quae oculis est obiecta. Similiter montes lunares, dum augment corporis huius superficiem, ipsius quoque claritatem augere & vim illuminantem statuit. Hanc, si probe memini, ingeniosissimus EVLERVS quaestionis propositae dedit enodationem. Ipsam enim Dissertationem prae me non habeo.

§. 73. At si ista rite sic se habeant, praetermissa videtur distinctio inter claritatem visam & illuminationem, quam maximi esse momenti in superioribus iam notauimus (§. 37.) Ita enim, qua late oculis patet corporis solaris superficies helioscopio armatis, aequae sane eam claram videri nemo est, qui temere negabit. Quare hoc tantum supererit, ut disquiramus, an eadem quoque sit illuminationis vis, quae a radiis provenit limbo solis vicinioribus, ac ea est, quae debetur radiis e centro disci emanantibus? Sic enim cel. EVLERVS calculum suum instruxisse videtur, quasi densitas radiorum ubique sit in ratione areae superficiei, ex qua emanant, nulla habita ratione situs plus minusve obliqui.

§. 74. Huius vero quaestionis discussionem eam dare, quae demonstratione nitatur omnibus numeris absoluta, cum a principiis pendeat postmodum saltem stabiliendis, haecenus nondum licet. Certitudinem tamen ipsi non fore defuturam spero, si cum experientiam tum propositiones quasdam in prima Optices parte satis superque demonstratas in subsidium vocemus, quarum ope claritatem visam cum illuminatione conferre poterimus. Quem in finem ceu vel in vulgus notum assumimus, radios e quovis puncto corporis, quod intuemur, in superficiem oculi externam sese diffundentes, ita ibi refringi, ut in retina oculi in punctum coincidunt, ibique puncti istius depingant imaginem. Hanc autem eo fore clariorem, quo plures radii in punctum istud retinae coincidunt, vel per se est evidens.

§. 75. Hinc iam prono fluit alueo, claritatem istam imaginis maiorem esse, quo maior fuerit radiorum densitas quoque maior pupillae apertura. Hanc vero aperturam, siue solis limbum siue eius centrum intueamur, constantem esse, tuto assumere licet. Ut adeo claritas imaginis solaris, & cuiuslibet ipsius partis statuenda sit simpliciter ut radiorum densitas. Ex his vero dictis conficitur, densitatem radiorum solarium eandem esse, siue e limbo siue e centro disci solaris in oculum irruant, quippe imago ex omni parte aeque statuenda est clara, cum partes disci solaris eadem gaudere claritate videamus.

§. 76. At hoc ipso porro necessario concludendum est, e quolibet disci Solaris puncto eun-

eundem in datam superficiei oculi partem incidere radiorum numerum, cum ii, qui in totam superficiem oculi sese diffundunt eandem in retina producant partium imaginis claritatem. Quare cum nequaquam mutetur radiorum istorum numerus, si in vicem superficiei istius oculi aliam corporis cuiuscunque substituamus superficiem, consequens sane est, eam in isthac superficie productam iri illuminationem a quavis disci solaris parte, quae proportionalis est spatio quam pars haec in retina oculi occupat, adeoque ergo magnitudini eius, non verae, sed adparenti. En vero iam quersum haec.

§. 77. Referat circulus ACB discum solem, quem hic ceu planum statuamus, cuiusque diameter sit AB. Convexitatem corporis solaris, quatenus diametro huic normaliter insistit anteriorem oculoque obiectam repraesentet semicirculus AMB, qui ergo diametro AB normabiliter insistere concipiatur. Sit huius superficiei pars quantumvis parva Mm. Ex M, m demittantur perpendiculares m p, MP, atque erit Pp particulae Mm magnitudo adparens, adeoque eius imagini in retina oculi proportionalis.

Fig. 5.

§. 78. At vero huic imagini proportionalem esse vidimus radiorum numerum in oculi superficiem incidentium, qui adeo, cum emanent cuncti e parte Mm, necessario ipsi Pp esse debent proportionales. Erit ergo numerus radiorum e data quavis superficiei solaris parte Mm in datam superficiem incidentium in ratione partis in diametro disci abscissae Pp.

§. 79. Quodsi ergo consideremus, eo maiorem esse illuminationis gradum, quo plures in eandem superficiem incidunt radii, quippe densiores sunt, utique euietum esse deprehendemus, *illuminationis augmentum a quavis superficiei particula mM procedens non esse ut huius particulae spatium verum mM, verummodo ut adparens pP, quod in disco solis obtegit.* Hoc vero ab illo differet simulac superficies mM fuerit ad AP inclinata. Etsi ergo, dum solem intuemur particula quaelibet mM aequae videatur clara, *illuminatio* tamen inde proueniens minime eadem erit. Ut adeo perperam cum claritate visa & hoc respectu confundatur. Alio quoque respectu perperam id esse factum iam supra vidimus (§. 37.)

§. 80. Quoniam radii solares in oculum vel datam quamvis superficiem incidentes eam sequuntur directionem, quae ad planum disci normalis est, patet omnes haberi posse ceu normales ad diametrum AB. Quare ii saltem normaliter e superficiem solis emanant, qui e centro disci proficiscuntur. Ceteri omnes plus minusue emanant oblique. Nascitur hinc vel sua sponte idea *anguli emanationis*, qui ad superficiem, ex qua radii luminis effluunt, eodem se habet modo, quo se habet angulus incidentiae ad superficiem ab istis radiis illuminatam. Est vero angulus inter directionem radii luminis & superficiem luminosae interiacens.

§. 81. Cum in exemplo praesenti directio radiorum sit secundum rectas MP, mp, erit *angulus emanationis* angulo mMP e vertice opposi-

oppositus ipsique ergo aequalis. Unde cum sit $mMP = PDM$, erit arcus AM mensura anguli emanationis, & MP ipsius sinus. Sed ob $mn = pP$, erit $Mm : Pp = MD : MP$. Quare spatium mM , ex quo radii effluunt erit ad quantitatem illuminationis, quam hic refert abscissa Pp , ut sinus totus ad sinum anguli emanationis. *Ut adeo vis illuminans simulque & ipsa illuminatio decrescat in ratione sinus anguli emanationis.*

§. 82. Propositio haec, ut maxime est palmaria, ita eam fusius exponere convenit, cum amplissimus eius in tota Photometria sit usus. Primo enim exinde manifesto sequitur, nequaquam perinde esse, qualis sit superficiei illuminantis situs. Immineat plano AB superficies luminosa CD ita ut ipsi sit parallela, utique radii GP cum sub angulo recto & emanent & incidant, maximam producent in P illuminationem. Mutato vero ipsius superficiei situ, eadem manente eius distantia GP & magnitudine EF , minor euadet illuminatio in ratione sinus anguli emanationis PGF , unde planum in P minus illuminabitur. Fig. 6.

§. 83. Contra ea secus se habebit res, si quaerenda sit illuminationis quantitas in A , ubi radii AG normaliter effluunt e superficie EF , oblique vero e superficie CD . Cum enim angulus incidentiae GAB in utroque casu sit idem, erit illuminatio in primo casu ad eandem in secundo, ut sinus totus ad sinum anguli emanationis CGA . Unde ergo patet, illuminationem alterari siue superficiei illuminantis siue plani illuminati mutetur situs, manente & distantia & magnitudine prioris.

§. 84. Novam hanc virium illuminantium legem ex unica hactenus observatione deductam aliis quoque firmare observationibus nequaquam erit superuacaneum, inter quas, quae vel frequentissime occurrit, sequens est. Quod si murum album vel a sole vel a caelo illuminatum quacunque intueamur ex parte, manente pupillae apertura, aequae iste in omni casu ad sensum videbitur albus, aequalique claritatis gradu conspicuus, hoc tantum discrimine, ut quatenus in priori casu murus iste instar speculi rudioris radios quosdam reflectit, ex ea parte, qua radii reflexi procedunt, aliquanto clarior videatur. Quod in posteriori casu secus est, cum undequaque a dimidio caeli hemisphaerio collustretur. Idem quoque observare licebit, si planum album sub diu ita ponatur, ut a toto caeli hemisphaerio, cum nubibus aequae albidis obtectum est, vel in crepusculo paullo ante solis ortum vel paullo post eius occasum collustretur. Sic enim planum istud, quacunque ex parte intuearis, aequae ad sensum clarum videbis. Hoc vero cum obtineat, eodem modo, quo supra evincetur, illuminationem esse ut sinus anguli emanationis. Plura experimenta, quibus & haec & aliae insuper firmantur positiones infra occurrunt, hunc ipsum in finem data opera instituta.

§. 85. Ut iam, quod supra nos esse passim facturos promissimus, (§. 18.) & huic propositionis qualemcumque addamus demonstrationem, sequentem tentabo, quam admittere

Fig. 7. ista propositio videtur. Sit AB superficies corporis

poris luminosi, cuius quaecumque particula lumen quaquaversum diffundat. Utcunque vero concipiamus luminis emanationem, concedendum erit, singulas corporis lucentis particulas esse in continua agitatione, ita ut particula C ab omnibus ipsi continguis feriatur easque vicissim percutiat. Has vero in hemisphaerio circum eam esse sitas, vel per se est evidens, cum in superficie posita statuatur. Quare motum vel lumen in partem averfam diffundet per alterum haemisphaerium. Demonstrandum iam est, luminis quantitatem secundum CF emissum esse ad lumen quod normaliter evibratur secundum directionem GC, ut sinus anguli emissionis FCB ad sinum totum. Quod ut fiat assumemus, vim, quae lumen secundum CF eiacularur, deberi particulis in recta DC sitis. Sit haec vis $= CD$. Resolvatur in normalem DE & parallelam EC, haec ad emittendum lumen nil confert, quod ergo sola vi DE evibratur. Est vero DE ut sinus anguli emissionis, quare & in hac ratione vis ista decrescit. Quod si ergo lumen emissum seu effectum spectemus, huncque causae statuamus proportionalem, consequens erit, quantitatem luminis oblique emanantis esse in ratione sinus anguli, sub quo emanat.

§. 86. Hoc itaque vel simili modo res ista videtur concipienda. Quod si quis secundum NEWTONVM statuere velit, cum lumine emigrare quoque corporis luminosi particulas, utique simili utetur demonstratione. Quo enim vis DE, qua evibrantur, erit minor, eo quoque minor erit particularum numerus, quae
simul

simul eiiciuntur. Celeritas enim, qua per rectam CF procedunt eadem erit, quicunque sit angulus emissionis. Ceterum nobis perinde erit, qualicunque ratione positio nostra demonstretur, cum sufficiat eam ex observationibus esse deductam, unde perquisitioni isti diutius non immorabimur, id potius acturi, ut elegantissima, ad quae ista propositio nos deducit, theoremata dilucide exponamus.

THEOREMA I.

Fig. 8. §. 87. *Ex quavis superficiei luminosae parte infinite parva AB eadem in datum punctum vel datam superficiem C incidit radiorum quantitas, quae incidere ex superficie normali AD aequae luminosa.*

DEMONSTRATIO.

In utroque enim casu illuminatio est in ratione composita superficiei illuminantis & sinus anguli emissionis. (§. 52. 81.) Quare priori respectu illuminatio normalis erit ad illuminationem obliquam ut DA ad AB . posteriori vero respectu ut sinus totus ad sinum anguli emanationis CBE , adeoque ut AB ad DA , siue reciproce ut superficies. Quae ergo rationes cum sese destruant, patet propositum.

THEOREMA II.

Fig. 9. §. 58. *Lumen a superficie $ABCD$ in P coincidens, idem est ac si incideret a superficie $abcd$ priori parallela, iisdem lateribus pyramidis $PABCD$ terminata & aequae luminosa.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim in utroque casu illuminatio est directe ut superficies & reciproce ut quadratum distantiae (§. 52. 48.) quippe anguli emanationis & incidentiae ponuntur iidem. At vero superficies sunt directe ut quadratum distantiae, quare & hic duae istae rationes sese destruunt. Patet ergo illuminationem in utroque casu esse aequalem.

THEOREMA III.

§. 89. Sit superficies luminosa $A B C D$, quae Fig. 10.
planum in P positum collustret. Sit porro alia superficies $a b c d$ ad priorem utcunque inclinata, sed iisdem pyramidis $P A B C D$ lateribus terminata, dico illuminationem in utroque casu fore eandem.

DEMONSTRATIO.

I°. Utraque superficies ponatur infinite parua, atque in $C D$ concipiatur tertia quaedam superficies secundae $a b c d$ parallela, eademque pyramidi inclusa, per Theorema I. constat, utramque planum in P aequae fore illuminaturam. At per Theorema II. illuminatio a tertia hac superficie producta eadem erit ac ea, quae provenit a superficie $a b c d$. Quare utraque superficies $A B C D$ & $a b c d$ planum in P aequae illuminabunt. Cum enim utraque ponatur infinite parua, aequalis quoque erit angulus incidentiae, quippe planum in P hic spectatur velut infinite paruum.

II°. Quodsi iam superficies istae non fuerint infinite paruae, nil impedit, quo minus pyramis in infinitas paruas partiatur, atque
vel

vel per se patet, singulis iam demonstrata posse adplicari. Cum ergo cuius spatiiolo in superficie $A B C D$ eadem debeatur illuminatio, quae debetur spatiiolo analogo in superficie $a b c d$, consequens est illuminationem totalem in utroque casu fore illuminationum istarum infinite paruarum & aequalium summam, ut adeo evidens sit eam in utroque casu fore aequalem.

THEOREMA IV.

§. 90. *Si utraque superficies $A B C D$, $a b c d$ sit utcunque curua, sed aequae luminosa iisdemque pyramidis lateribus terminata, eadem erit plani in P illuminatio in utroque casu.*

DEMONSTRATIO.

Pyramis $P A B C D$ iterum diuisa concipiat in innumeras infinite paruas communem verticem in P habentes, atque per theorema praecedens (§. 89. I.) patet ratione cuiusvis earum verum esse propositum, unde ergo & verum sit necesse est de earum summa.

§. 91. *Poterit ergo in vicem istarum superficierum substitui segmentum superficiei sphaericae iisdem pyramidis lateribus terminatum & aequae luminosum; atque idem obtinebitur illuminationis gradus.*

§. 92. *Perinde quoque erit, siue maior siue minor sit sphaerae istius diameter. Neque opus est ut superficies P sit in centro sphaerae, dummodo huius segmentum latera pyramidis non excedat, verum ab iis terminetur.*

§. 93. *Quodsi ergo superficies $A B C D$ sit infinite extensa planoque in P parallela, segmentum istud*
sphaerae

sphaerae quod ipsi substituere licet abibit in hemisphaerium. Ut adeo in utroque casu idem obtineatur illuminationis effectus.

§. 94. *Idem obtinet, si planum P superficiei A B C D sit infinite vicina.* Eodem enim modo illuminabitur ac fieret ab hemisphaerio aequo luminoso cuiuscunque diametri.

§. 95. Cum ergo in singulis his casibus ea requiratur conditio, ut superficies a b c d quae in vicem superficiei substituitur iisdem pyramidis lateribus terminetur, atque hac servata lege superficiei distantia qualiscunque esse possit, consequens est, ut illuminatio, quae debetur magnitudini, distantiae & positioni superficiei luminosae, simpliciter ad magnitudinem adparentem reduci possit. Haec enim per figuram pyramidis determinatur, ad quam cetera omnia reduximus.

§. 96. Vidimus enim (§. 87) situm superficiei obliquum reduci posse ad normalem vel alium quemcunque, iisdem tamen pyramidis lateribus terminatum. Qua denuo servata lege porro euicimus distantiam qualemcunque reduci posse ad quamlibet aliam (§. 88. 89.) sic ut manente pyramidis ad superficiem in P habitu & positione, eadem quoque maneat illuminatio. Sic enim in primo casu superficies A B cum maior sit superficiei A D maiorem producere deberet effectum, nisi in eadem ratione ob angulum emanationis A B D minorem minor foret radiorum emanantium quantitas. Similiter in secundo casu illuminatio a superficie a b c d proficiscens minor fit ob imminutum spatium, at in eadem ratione intenditur ob maiorem vicinitatem. Unde cum in

Fig. 8.
Fig. 9.
utro-

utroque hoc casu effectus contrarii sese destruant, hinc concinnas istas eruere licuit positiones, quibus in sequentibus maximo cum compendio calculi utemur.

§. 97. Cum itaque distantia, magnitudo & positio obiecti luminosi ad solam eius magnitudinem adparentem reducantur, consequens est; *Illuminationem in quocunque casu simpliciter perdere* 1°. *ab obliquitate incidentiae*, 2°. *a magnitudine luminis adparente*, 3°. *ab eiusdem intensitate siue ab ipsius splendore.*

§. 98. Magnitudo adparens est angulus solidus lateribus pyramidis qualiscunque vel coni terminatus, cuius ergo quantitatem metitur segmentum superficiei sphaericae, iisdem pyramidis lateribus terminatum. Apex vero pyramidis cum sphaerae istius centro coincidit, atque in eo positum censetur planum illuminatum quod hic ceu punctum est spectandum. Hoc ergo modo determinabitur in omni casu vis radiorum coincidentium illuminans (§. 68.) *Etenim eorum quantitate per aream spatioli illuminati diuisa prodit spatioli illuminatio siue claritas.*

§. 99. Quoniam ergo ad segmenta sphaerica reduximus illuminationis computum, atque perinde est diametri magnitudo, (§. 92. 98.) ita ipsius semidiametrum siue radium in sequentibus constanter per unitatem efferemus.

§. 100. Cumque porro planum quoduis, cum maxima est eius illuminatio, ab hemisphaerio illuminetur, hoc quippe casu quacunque ex parte radii incidere possunt reapse incidunt; ita illuminationem ab hemisphaerio procedentem ut maxima est, omnibus veluti
nume-

numeris absolutam vocabimus. Jam vero vidimus hoc obtinere 1°. ubi planum illuminandum est in ipsa corporis illuminantis superficie siue eam tangit (§. 94.) 2°. Ubi superficies illuminans planum illuminandum undique cingit vel obtegit, veluti telluris superficiem obtegit coelum. 3°. Ubi superficies planum colustrans huic est parallela & velut infinite extensa (§. 93.) Singulis hisce casibus, eodem manente cuiusvis partis superficiei luminosae splendore, eadem obtinet illuminatio, eaque maxima vel absoluta.

§. 101. Hinc iam vel sua sponte fluit propositio sequens eaque elegantissima: *Si quod tegit omnia caelum, qua late patet oculis, eodem illu-
sceret splendore, quo solem augustissimo suo iubare splen-
dere videmus, tunc demum telluris superficies eodem
modo illuminaretur, ac si esset in ipsa solis superficie
posita.* Quantum ergo vi solis illuminanti siue claritati obiectorum terrestrium, ob immensam solis distantiam detrahatur hinc patet apertissime. Caue tamen statim concludas, illuminationem absolutissimam se ad eam habere, quae in hoc qui actu est rerum statu obtinet, ut se habet totum, quod intuemur, hemisphaerii coelestis spatium ad magnitudinem disci solaris adparentem. Hanc equidem intulit consequentiam cel. SMITHIVS, in praeclearo, quod de Optica scripsit, systemate claritatem lunae & solis inuicem comparaturus. At humani quid passum esse summum virum, & infra videbimus, & vel inde patet, quod, dum hanc inde deducere volumus conclusionem, ratio diversitatis angulorum incidentiae

D

haben-

habenda sit. Quodsi enim planum quoddam ab hemisphaerio collustratur, omnes fane anguli incidentiae simul occurrunt. Quod vero secus est, ubi illuminatio tantum procedit a sphaerae segmento, quale in hoc casu sistit discus solaris. Hanc autem ob causam rationem istam duplo fore minorem statim videbimus. Ceterum propositionem quam hic exposuimus ad lunam plenam adplicauit cel. Auctor mox citatus, cui, salua conclusione inde deducta, aequae ac soli adplicabilis est.

§. 102. Hisce iam ita praestructis, specialiores calculo perlustrabimus casus, cui instituendo principia ista vel maxime sufficiunt. Vidimus vero, cuicunque obiecto luminoso substitui posse segmentum sphaerae, quod ipsius referat magnitudinem adparentem. Quod ut fieri possit, considerata venit obiecti luminosi cum figura tum magnitudo adparens. Quae a figura pendet illuminationis varia modificatio, eam ad tres casus reducemus maxime uniuersales. 1°. Ponemus limbum corporis, quatenus oculis obiicitur esse circularem, quo casu segmentum sphaericum erit circulare, circuloque sphaerae vel maximo vel minori terminatum. Huc referas coeli hemisphaerium, solem, lunam plenam, cet. 2°. Limbum corporis luminosi statuemus rectis lineis terminatum. Quo casu superficiei sphaericae segmentum terminabitur circulis sphaerae maximis, eritque vel triangulum sphaericum, qualia in trigonometria sphaerica subiiciuntur calculo, vel denique ex similibus triangulis compositum, siue triangulatum. Huc referas

referas coeli faciem, quatenus per aedium fenestras vel alias quascunque aperturas rectilineas conspicuum est. 3°. Occurrunt casus infiniti, quibus limbus luminis adparens neque circularis nec rectilineus est, verum vel alia quacunque terminatur curua, vel denique figuram habet ex varii generis aliis compositam. Ad quam ultimam classē referas lunam lumine plus minusue orbam, coelum aedium faciebus vel montium ex parte obtectum, cet.

§. 103. In singulis istis casibus adparens corporis luminosi figura ita sumenda est, qualem se sistit oculo in puncto plani illuminandi posito. Porro ut angulorum incidentiae haberi possit ratio, superficiem illuminandam ponemus infinite parvam. Hoc enim modo illuminationem pro dato quouis plani illuminati loco vel puncto definire licet. Denique ut iam passim in scriptis opticis occurrit idea *coni luminosi*, cuius apex est datum quoduis punctum radians, ita similis hic spectandus venit, situ tamen inuerso. Huius quippe apex est in plano illuminando. Illum vero, ut ab hoc distinguamus, *conum radiorum diuergentium*, hunc *conum radiorum coincidentium* vocabimus. (§. 67. 68.) Uterque abit in pyramidem vel aliud quodcunque solidum cuspidatum, simul ac vel plani illuminati vel corporis lucentis limbus adparens terminetur lineis rectis aut qualicunque modo incuruatis.

§. 104. Sit eiusmodi solidum pyramis **P A B C D**. Quodsi ergo huius basis **A B C D** collustratur a puncto radiante **P**, patet radios **in eam** incidentes omnes e puncto isto ema-

Fig. 10.

nare eosque esse diuergentes. Ut adeo hic obtineat prior casus, eritque pyramis radiorum diuergentium. Inuertendo iam ponamus basin $A B C D$ esse superficiem luminosam, eamque collustrare punctum P in plano quodam situm. Euidens est ex quouis superficiei $A B C D$ puncto radios incidere in P ; Hoc uero obtinente *pyramis radiorum coincidentium* nominanda venit. *Luminosa* in utroque casu dicitur, quia ex meris radiis luminis est composita, qui omnes e vertice P vel emanant, vel in istum collimant.

§. 105. Quoniam punctum P semper spectatur ceu particula cuiusdam superficiei infinite parua, patet non perinde esse, qualis sit pyramidis istius ad eam inclinatio. Hac enim mutata, mutabuntur quoque anguli emanationis vel incidentiae, adeoque & radiorum quantitas & densitas. Hanc uero maiorem esse, ubi basis $A B C D$ superficiei in P normaliter imminet, vel ab hoc situ parum recedit, ac est ubi maior obtinet inclinatio, vel per se est euidens.

§. 106. Assumta ergo hac conii vel pyramidis luminosae notione, patet, utrumque casum eodem absolui posse calculo, quippe in utroque considerandi veniunt anguli emanationis & incidentiae, vis illuminans & illuminatio, basis $A B C D$ & particula plani vel superficiei in P . Cumque porro radiorum quantitas decrescat in ratione composita sinuum angulorum emanationis & incidentiae, patet analogiam istam omnibus numeris esse absolutam, atque mutatis saltem debite terminis utrinque
in

in oppositos, substitutione ista nil esse facilius. At iam ad casus specialiores deueniamus, primumque euoluamus eum, quo limbus corporis luminosi adparens est circularis, atque ut a simplicioribus progrediamur ad magis composita, ponamus lumen istud circulare plano illuminando normaliter imminere. Quo adeo casu conus radiorum coincidentium ipsi normaliter insistit.

§. 107. Referat itaque A D B hemisphae- Fig. 11.
rium, hocque insinat plano A B, atque in centro C illuminanda sit plani istius particula infinite parua. In hanc coincident radii per conum M C S, velut e segmento sphaerae M D S, quod lumini circulari substituere licet, emanantes. (§. 91. 102.) E centro C erigatur normaliter radius sphaerae C D, atque ducta M S ipsique infinite vicina m s, spatiolum M S s m referet zonulam sphaerae infinite paruam. Quaerendum iam sit illuminationis incrementum huic zonulae debitum. Cum zonula ista plano A B sit parallela eiusque axis sit recta normalis C D, patet angulum incidentiae singulorum radiorum fore $\angle M C A$, huiusque ergo sinum $\sin \angle M C A = P M = C Q$. Sed area zonulae, cui proportionalis est radiorum in C incidentium quantitas est ut particula q Q in axe abscissa. Quare illuminatio erit ut factum ipsius Q q in sinum incidentiae C Q ductae. Compleatur quadratum C D E B, atque ducta diagonali C E, erit $Q R = C Q$, adeoque factum istud C Q. Q q $\equiv$ rectangulo Q R r q. Ut adeo quaesitum illuminationis augmentum efferi possit per spatiolum Q R r q. Cumque

D 3 ergo

ergo cuius zonulae simile spatiolum in triangulo CDE respondeat, evidens est illuminationem summae zonularum siue segmento MDS debitam, efferendam esse per summam spatiolorum, adeoque per quadrilaterum $QRED$. Quantumvis ergo sit sphaerae segmentum MDS , patet ducta tantum recta MS , illuminationem ipsi debitam repraesentatum iri per spatium $QRED$. atque eam fore ad illuminationem absolutam, quae toti debetur hemisphaerio, ut spatium istud $QRED$ ad totum triangulum CDE . (§. 100.) At concinnior euadet haec positio sequentem in modum.

§. 108. Cum CE sit diagonalis quadrati, cuius latus semidiametro vel radio sphaerae aequalis, erit area trianguli CDE aequalis dimidio quadrato radii. Sed area trianguli $CQR =$ dimidio quadrato lateris CQ , siue quod idem est, dimidio quadrato cosinus anguli DCS , quo a priori subtracto, remanet spatium $QRED$ dimidio quadrato sinus eiusdem anguli DQS aequale. Est vero angulus iste DCS semidiameter luminis adparens, adeoque, cuncta duplicando, sequens inde elicitur

THEOREMA V.

§. 109. Si obiectum luminosum, cuius limbus adparens est circularis, plano cuidam normaliter imminet, erit illuminatio hinc nascent ad illuminationem absolutam, ut quadratum sinus semidiametri adparentis ad quadratum sinus totius.

§. 110. Hoc ipsum theorema Cel. EVLERVS in scripto supra iam citato (§. 71.) ex suis quoque principiis, etsi ab his, quibus usus sum, diuersis, eruit. Inopinati huius consensu

sus ratio in figura circulari est quaerenda. Aliam enim si assumas figuram statim euanesceat iste consensus. Duobus adhuc casibus infra occurret hoc, quod ita vocare liceat, calculi *phaenomenon*, e circulari & sphaerica figura nascens.

§. 111. Cum itaque illuminatio absoluta per quadratum radii circuli exprimatur, eademque instar moduli esse possit pro ceteris definiendis, sic eam constanter per unitatem exprimemus, nisi diserte moneatur contrarium. Unitas enim ista unice adhuc pendet a splendore luminis quo planum quoduis collustratur. Ut adeo manente hoc splendore unitas ista constans sit. Quare eo minus ab ea recedere opus est, cum & sinus angulorum per eam eiusque partes exprimemus.

§. 112. Cum igitur illuminatio sit ut quadratum sinus semidiametri adparentis, ilico hinc elucescit, quod supra innuimus (§ 101.) falso concludi illuminationem absolutam esse ad eam quam producit corpus luminosum, cuius figura adparens terminatur circulo sphaerae minori, in ratione areae totius hemisphaerii ad aream disci adparentis. Haec enim ratio esset ut unitas ad duplum quadratum sinus dimidii semidiametri adparentis. At esse debet ut unitas ad quadratum sinus semidiametri adparentis. Haec vero ratio pro minoribus sphaerae segmentis, quale sistit discus solaris, duplo fere minor est illa.

§. 113. Ex dictis iam fuit alia positio non minus concinna quam quidem gratis potius assumptam quam demonstratam passim inuenias.

Speñtat vero corpus luminosum, cuius figura sphaerica est, veluti sol, luna, ceterique planetae. Discum huiuscemodi corporis adparentem circularem esse vel per se est evidens. Unde utique illuminatio plani, quod ipsi normaliter obuertitur, erit ut quadratum sinus semidiametri ad parentis (§. 109.).

Fig. 12. §. 114. Sit igitur CB semidiameter solis vel cuiuslibet corporis luminosi sphaerici. Huic normalis sit axis CAE , in quo sit planum illuminandum E . Ex hoc puncto ducatur recta ED , quae superficiem luminis siue circulum BDA tangat, ad quam ducatur normalis CD ex centro C . Erit EC distantia plani E a centro, & angulus DEC erit corporis luminosi semidiameter adparens, cum CD sit vera. Quod si iam CE spectetur ut sinus totus, erit CD sinus anguli CED siue semidiametri adparentis, adeoque sinus totus se habebit ad sinum semidiametri adparentis, ut se habet distantia centri EC ad semidiametrum veram CD . Erit ergo sinus semidiametri adparentis reciproce ut distantia EC , Quare eius quadratum reciproce erit in ratione duplicata distantiae centri. At quadratum sinus semidiametri adparentis est ut illuminatio plani in E ; Unde ergo consequitur sequens

THEOREMA VI.

§. 115. Si corpus luminosum, fuerit sphaericum, illuminatio absoluta in A se habebit ad quamlibet aliam normalem, in E , ut se habet quadratum distantiae CE ad quadratum semidiametri corporis CA , adeoque reciproce in ratione duplicata distantiae objecti E a centro corporis C .

§. 116.

§. 116. Ut ergo illuminationem absolutam per unitatem designauimus, (§. 111.) ita quoque semidiametrum CA per eam effereamus. Hinc enim obtinebitur cuiusuis alius illuminationis gradus, unitatem per quadratum distantiae obiecti a centro C diuidendo. Plura quoque sunt, quae hic notare convenit.

§. 117. Primo quidem ex his manifestum est, pro corporibus sphaericis veram esse positionem, quam hactenus tunc saltem ad veritatem accedere posuerunt WOLFIVS, THVM-MIGIVS, alique plurimi, cum semidiametrum adparentem ceu contemnendam ob parvitatem statuere licet. Prope enim perspexerunt, si semidiameter ista adparens notabilem haberet magnitudinem, notabilem quoque fore differentiam inter distantiam singularum superficiei AD partium, ut & inter angulos incidentiae radiorum e partibus istis emanantium. De tertia enim differentia, quae est inter angulos emanationis, si cel. EVLERVM excipias, ne verbum quidem inuenies. Hasce vero differentias, cum suspicerent eas propositionis concinnitatem fore turbaturas, in calculum non induxerunt. At iam vidimus, habita earum ratione concinnam hanc positionem saluam esse, simul ac corpus lucidum sumatur esse sphaericum, quale certe est Sol, cuius vim illuminantem in *Meletematibus varii argumenti* calculo prosequutus est Cel. THVM-MIGIVS. Quare hoc respectu, omni rigore vera erunt, quae de illuminatione planetarum ut proxime tantum vera demonstraui.

§. 118. Excipiendum hic esse diximus Cel. & ingeniosissimum EVLERVM. Etenim in scripto supra iam passim laudato (§. 71. 72.) differentiarum istarum rationem habuit. Ut mirer, cum theorema, quod nobis hic quintum est (§. 109.) de corporibus sphaericis demonstrasset, sextum hoc nostrum (§. 116.) prono certe alueo ex illo fluens, eius sese subduxisse ingenii acumini. At forsan ad maiora properans hisce minus immorandum esse censuit. Ceterum iam monuimus, paucis saltem casibus calculum Eulerianum cum nostro coincidere (§. 110.)

§. 119. Ex dictis porro liquescit, cur distantia a centro semidiametro minor assumi nequeat. Etenim propius admoto plano E, ita augetur illuminatio, ut cum pervenit in A, ibi iam eius illuminatio euadat maxima siue absoluta, quae debetur magnitudini ad parenti maximae. Sinus enim quilibet alius sinu toto maior esse nequit.

§. 120. Haftenus exposuimus, qualis in eo casu obtineat illuminatio qui simplicissimus est, siue quo limbus corporis luminosi adparens est circularis, atque plano illuminando normaliter imminet, quoque adeo conus luminosus radiorum coincidentium ipsi verticaliter insistit. Possemus iam, his absolutis, ad ceteros progredi casus. At cum isti ita sint compositi, ut calculo prosequendi sint operosiori, non inutile erit, si videamus, quomodo faciliiori huic casui calculus adaptetur. Quo facto medium parabitur conos luminosos utrius-

triusque generis (§. 103. 104.) inter se comparandi.

§. 121. Ad undecimam itaque figuram re- Fig. 11.
uertamur, sintque omnia ut in (§. 107.) Fiat
radius $AC = 1$, angulus $MCD = v$, Mm
 $= dv$, $MP = \cos. v$. $MQ = \sin v$.
 $=$ semidiametro zonulae $MSsm$. Ratio dia-
metri ad peripheriam & hic & in toto hoc
opere dicetur $= 1 : \pi$, ita ut posita diame-
tro $= 1$, sit peripheria $= \pi = 3, 15926.....$
His ita positis erit area zonulae $MSsm = 2$
 $\pi \sin v. dv$. cui proportionalem statuimus quan-
tatem radiorum ex ea quaquaversum ema-
nantium. At vero cum ista sit ut sinus an-
guli incidentiae, si in datum planum incidant,
erit illuminatio in C a radiis zonulae $MSsm$
proveniens, $= 2 \pi. \sin v. \cos v. dv = 2 \pi$
 $\sin v. d (\sin v.)$ Quare integrando erit illu-
minatio toti segmento MDS debita $= \pi (\sin$
 $v)^2$. Ut adeo hinc absque ullis ambagibus
pateat theorema V. (§. 109, quippe angulus
 v est obiecti semidiameter adparens.

§. 122. Hoc vero modo obtinuimus illu-
minationis in C intensitatem, quae erit $= \pi$
 $\sin v^2$. Quodsi quaeratur illuminationis quan-
titas, sumendum erit factum quantitatis $\pi \sin$
 v^2 in aream spatiosi illuminati C . Denotat
enim $\pi \sin v^2$ veluti numerum radiorum, qui
incidunt in spatium, quod est $= 1$, adeoque
eorum densitatem (§. 44), a qua pendet plani
illuminati claritas.

§. 123. Quodsi fuerit $v = 90^\circ$, erit $\sin v$
 $= 1$, adeoque illuminatio absoluta $= \pi$. Etsi
vero

vero eam supra per unitatem expressimus (§. 111.) hic tamen eius valor π adhibendus erit, ubi conos radiorum diuergentium & coincidentium invicem comparare volueris. Quod iam, casum hactenus euolutum invertendo, sequentem in modum adgrediemur. (§. 106.)

§. 124. Sit C particula superficiei luminosae infinite parua, cuius semidiametrum adparentem in D visam efferemus per z , quae itidem quantitate, cum sit infinite parua, exprimere hic licet eius sinum. Sit porro in D sphaerae circum C descriptae segmentum infinite paruum, cuius semidiameter & sinus vocetur ζ . atque patet aream circelli C fore $= \pi z z$, segmenti D vero $= \pi \zeta \zeta$. denique illuminationis in D quae particulae C debetur intensitatem fore $= \pi z^2$, eiusdem vero quantitatem $= \pi^2 z^2 \zeta^2$. At iam quaeritur quantitas radiorum, quos particula C per totum hemisphaerium vel per datum quemlibet conum luminosum M C S diffundit.

§. 125. Quantitas radiorum emanantium pendet 1°. a splendore particulae C, quippe qui constituit eius claritatem veram siue intensitatem luminis (§. 36. 39.). 2°. ab eius area, quippe quae radiorum in idem spatium coincidentium auget vel minuit quantitatem (§. 38. 52.) 3°. denique ab angulo emanationis, cum minuatur illuminatio & radiorum oblique emanantium quantitas, ut huius anguli sinus. (§. 81.) splendorem hic ponemus $= 1$, cum calculum, quem sumus instituturi, non ingrediatur. Aream circelli C diximus $=$

$zz\pi$ & dicto angulo $MCD = v$, erit sinus emanationis $= \cos. v$. adeoque quantitas radiorum sub angulo MCA in zonulam $MSsm$ incidentium erit $= 2\pi^2zz. \cos. v. \sin vdv$, id est ut factum ex area circelli C , zonulae $MSsm$ & sinu emanationis. Quare integrando habebitur quantitas radiorum per conum luminosum MCS diuergentium $= \pi^2z^2 \sin v^2$. Crescet igitur ut factum ex areola circelli in basin Coni luminosi, cuius diameter est MS . Est enim πz^2 area circelli C , & $\pi \sin v^2$ area baseos coni MCS , cuius latus MC est $= 1$. Elegans ergo & hinc fluit

THEOREMA VII.

§. 126. Sit $MCcS$ conus, cuius axis CE basi MS normaliter insistit, atque ita truncatus, ut segmentum Cc sit infinite paruum & ad axin normale; Posito iam latere $CM = 1$, dico si segmentum Cc lucidum radios per conum in basin diffundat, eorum quantitatem fore factum ex areola segmenti Cc in aream baseos MS ducta.

Fig. 13.

§. 127. Huic theoremati, quod radios spectat diuergentes prorsus analogum est sequens

THEOREMA VIII.

§. 128. Si basis coni MS concipiatur esse luminosa, quantitas radiorum in segmentum Cc infinite paruum coincidentium erit factum ex area segmenti Cc in aream baseos luminosae MS . adeoque posito in utroque casu eodem splendore, quantitas ista erit aequalis.

§. 129.

§. 129. Demonstratione hoc theorema non indiget, cum ex §. 121. palam sit atque evidens. Vidimus enim supra (§. 91.) basi MS substitui posse segmentum sphaerae, cuius radius est CM, subtensa vero MS. Ceterum ex comparatione utriusque theorematidis hic in medium prolatis manifestum fit, quae de comparatione radiorum coincidentium & divergentium in superioribus adnotauimus. (§. 106.) Etenim posito in utroque casu eodem superficieum illuminantium splendore, eadem erit radiorum in superficiem oppositam incidentium quantitas. Contra ea diversissima aderit illuminatae superficiei claritas. Haec enim erit reciproce ut area illuminata. Erit ergo in CC finita, in MS vero infinite parva. At de his infra plura. Determinanda iam venit ea illuminatio, quae producitur, cum conus luminosus plano illuminando obliquius insistit. Quod v. gr. locum habet, quando sol vel luna plena non fuerit verticalis.

Fig. 14. §. 130. Sit ACBD circulus sphaerae verticalis, AEFB horizon, IM circulus in superficie sphaerae minor, conum luminosum terminans, per quem obiectum in plano horizon-
tis atque in centro sphaerae K situm, est illuminandum. Centrum vel polus huius circuli sit G; CGED verticalis per polum hunc transiens. M punctum quodvis in isto circulo, & CMFD verticalis per istud demissus. Circulo MI ductus concipiatur infinite vicinus, eodem polo P gaudens, qui sit Nn. E polo G ducantur circuli maximi vel eorum arcus GM, Gm sibi infinite vicini, atque ex M in CG de-

demittatur arcus normalis MH, quaerenda iam est illuminatio particulae Mm Nn debita. Quem in finem fiat

distancia centri a vertice, $GC = a$,

distancia circuli M a polo, $MG = x$.

distancia puncti M a vertice, $MC = z$,

angulus CGM $= y$.

atque erit

$$\cos. HM = \cos. x : \cos. HG.$$

$$\cos. z = \cos. HC. \cos. HM.$$

Unde

$$\cos. z = \frac{\cos. x. \cos. HC.}{\cos. HG}$$

Sed

$$HC = a - HG \text{ \& \text{ cos. HC } = \frac{\cos. a.}{\cos. HG.} + \sin a. \sin HG}$$

quare

$$\cos. z = \cos. x (\cos. a + \sin a. \tan HG)$$

Est vero

$$\tan HG = \tan x. \cos. y.$$

unde

$$\cos. z = \cos. x. \cos. a + \{\sin a. \sin. x. \cos. y\} = \sin MF$$

qui est sinus anguli incidentiae.

Porro est spatiolum

$$Mm Nn = dy dx \sin x.$$

Adeoque huius particulae vis illuminans, cum sit ut sinus anguli incidentiae, erit

$$d\eta = dy \cos. a \sin x. \cos. x. dx. + \sin a \cos. y. dy. \sin x^2. dx.$$

Duplicem iam haec formula requirit integrationem, in quarum prima statuenda x & dx . const. ut habeatur illuminatio debita annuli sphae-

sphaerici segmento infinite paruo MI. Unde erit

$$d\eta = y \cos. a \sin x. \cos. x. dx \\ + \sin a. \sin y. \sin x^2 dx$$

Atiam ut habeatur illuminatio debita sectori IGM, ponatur y const. atque erit, debita adiecta constante,

$$\eta = \frac{1}{2} \cos. a \sin x^2 y \\ + \frac{1}{2} \sin a. \sin y (x - \frac{1}{2} \sin 2x)$$

Quae est illuminatio pro sectori IGM. En iam casus quosdam speciales.

§. 131. Si centrum circuli fuerit in vertice, puncta G & C coincidunt, eritque $a = \sin a = 0$, $\cos. a = 1$. adeoque illuminatio

$$\eta = \frac{1}{2} \sin x^2 y$$

Erit ergo ut factum ex quadrato sinus semidiametri adparentis in dimidium angulum IGM. adeoque si pro sectori totus sumatur circulus, erit $\frac{1}{2}y = \pi$, unde illuminatio $= \pi. \sin x^2$. Quem casum ceu faciliorem supra iam perlustraui-
mus. (§. 121.)

§. 132. Si centrum circuli fuerit in horizonte, coincident puncta G & E, eritque $a = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$, $\cos. a = 0$, $\sin a = 1$, unde

$$\eta = \frac{1}{2} \sin y (x - \frac{1}{2} \sin 2x)$$

In hoc casu angulus y rectum excedere nequit, faciendo igitur $y = 90^\circ$. erit $\eta = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x)$, quae est illuminatio quadranti circuli istius debita, qui ex alterutra parte verticalis CE supra horizontem versatur. Ut & alter addatur quadrans, duplicanda est ista formula, eritque

$$\eta = x - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Erit

Erit ergo hoc casu, quo centrum circuli in horizonte versatur illuminatio a semicirculo visibili proficiscens aequalis differentiae inter semidiametrum adparentem & dimidiam partem sinus diametri adparentis.

§. 133. Si centrum G sit in vertice, atque arcus GM abeat in quadrantem, totus quoque circulus abibit in hemisphaerium horizonti insistens. Hoc vero casu obtinet illuminatio absoluta eritque $a = \sin a = 0$, $\cos. a = 1$, $x = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, $\sin x = 1$, $\cos. x = 0$, $y = 180^\circ = \pi$, $\sin y = -1$. unde illuminatio dimidio hemisphaerio debita erit

$$\eta = \frac{1}{2}\pi$$

& pro toto circulo

$$\eta = \pi.$$

Quae ergo est illuminatio absoluta, ad quam ceterae omnes sunt referendae, si comparatio instituat. Iam vero monuimus eam in his calculis non exprimi per unitatem, sed per valorem ipsius π (§. 123. 121).

§. 134. Sit altitudo centri EG qualiscunque, fiatque $y = 180^\circ = \pi$, erit $\sin y = 0$, adeoque pro semicirculo ex alterutra parte verticalis CGE erit

$$\eta = \frac{1}{2}\pi. \cos. a \sin x^2.$$

& illuminatio toti circulo debita

$$\eta = \pi. \cos. a. \sin x^2.$$

Est vero $\cos. a$ ipse sinus altitudinis centri G, & $\sin x^2$ est quadratum sinus semidiametri adparentis, denique $\pi \sin x^2$ est area baseos cylindri luminosi siue disci adparentis. Hinc iterum ad elegantissimum hoc conducimur

THEOREMA IX.

§. 135. Sit corpus luminosum circulare vel sphaericum supra datum planum utcunque suspensum, illuminatio plani istius, cui obuertitur, erit factum ex sinu altitudinis centri & area disci adparentis.

§. 136. Huic affine est sequens

THEOREMA X.

§. 137. Illuminatio absoluta est ad illuminationem corporis circularis vel sphaerici utcunque super planum quoddam suspensi, ut unitas ad factum ex sinu altitudinis centri in quadratum sinus semidiametri adparentis ducto.

Etenim illuminatio absoluta $= \pi$ (§. 133.) quare ratio $\pi : \pi \cdot \cos. a. \sin x^2 = 1 : \cos. a. \sin x^2$ est ea ipsa ratio, quam effert theorema.

§. 138. Hinc prono iterum alueo fluit

THEOREMA XI.

§. 139. Si idem corpus circulare siue sphaericum plano cuidam dato & in eadem distantia centri normaliter & oblique immineat, erit illuminatio normalis ad illuminationem obliquam, ut sinus totus ad sinum altitudinis centri in casu posteriori. Etenim ob distantiam in utroque casu eandem, eadem quoque erit semidiameter adparens. Unde differentia illuminationis tantum ab altitudine pendet. Est vero in casu priori sinus altitudinis $= 1$. Unde constat propositum.

§. 140. Inexpectatum quid habent haec theoremata, quod maxime ea reddit concinna. Dubitari enim omnino licebat, an obliquitas radiorum e singulis corporis circularis
vel

vel sphaerici punctis emanantium & incidentium ita velut in summam contrahi, atque ex cunctis hoc sumi posset medium, quod *altitudini centri* respondet. Sumta equidem est ista altitudo ab HALLEO, cum in vim radiorum solarium calefacientem inquireret. At ni fallor tamquam proxime vera. Exacte autem eam veram esse, quae pro ceteris omnibus est assumenda, nondum vidi demonstratum esse. Simile quoddam dubium, quod corpora luminosa sphaerica spectat, supra iam solvimus. (§. 117.)

§. 141. Ex formulis erutis singuli iam casus illuminationis, quae per conum fit facile calculo subduci possunt. Quare progredi licet ad secundum casum generalem (§. 112.) quo nempe limbus corporis luminosi adparens rectis lineis terminatur, siue quo segmentum sphaerae uno vel pluribus constat triangulis sphaericis, circulis maximis terminatis. Ut vero & hic a simplicioribus ordiamur, ponemus, unicum esse triangulum, idemque rectum, cuius crus alterum & hypotenusa in vertice coincident. Maioris quoque perspicuitatis ergo assumemus planum illuminandum esse horizontate.

§. 142. Sit ergo $ACBD$ circulus verticalis, in A & B horizontem AEB bisecans, qui iterum in E bisectus sit in duos quadrantes AE, EB . Ducto iam circulo quolibet EMQ ipsique infinite vicino $E m q$, demissoque verticali CPD , quaeritur illuminatio plani in centro sphaerae positi, quae debeatur triangulo rectangulo MCQ .

Fig. 15.

E 2

§. 143.

§. 143. E polo P ducantur arculi paralleli Mm, Nn, sibi que infinite vicini, sitque illuminatio areolae MmnN debita $\equiv d d \eta$. Porro fiat

$$CQ = y, PB = \omega$$

$$MQ = x$$

atque erit

$$\text{areola } MmnN \equiv dy. dx. \cos. x.$$

$$\text{sinus altitudinis } PM \equiv \cos. x. \cos. y.$$

Quare cum illuminatio sit in ratione composita siue ut factum utriusque huius quantitatis, erit

$$d d \eta \equiv dy. \cos. y. d x. \cos. x^2$$

Quae formula ut integretur, primo ponenda erit y & dy const.

unde

$$d \eta \equiv \frac{1}{2} dy. \cos. y (x + \sin x. \cos. x)$$

Quae ergo est illuminatio debita parti MQqm.

§. 144. At si iam ponatur y siue CQ variabilis, una quoque variabitur $x \equiv MQ$, hac lege ut sit

$$\sin y \equiv \cot. \omega. \text{tang. } x.$$

Ponitur vero ω const. adeoque erit

$$d \sin y \equiv dy \cos. y \equiv \cot \omega. d \text{tang. } x.$$

Quo valore substituto habebitur

$$d \eta \equiv \frac{1}{2} \cot. \omega (x d \text{tang. } x + \sin x. \cos. x. d. \text{tang. } x)$$

Est vero

$$d \text{tang. } x \equiv dx : \cos. x^2$$

quare substituendo hunc valorem in termino secundo

$$d \eta \equiv \frac{1}{2} \cot. \omega (x d \text{tang. } x + \text{tang. } x. dx)$$

adeoque absoluta integratione

$$\eta \equiv \frac{1}{2} \cot \omega. x. \text{tang. } x$$

At

At cum sit

$$\cot \omega \tan x = \sin y$$

erit

$$\eta = \frac{1}{2} x \sin y.$$

Sic tandem peruenimus ad formulam valde concinnam, quam sequens effert

THEOREMA XII.

§. 145. *Illuminatio, quae provenit a triangulo verticali CMQ est demidia pars facti ex sinu cruris verticalis CQ in arcum cruris alterius MQ.*

§. 146. Manente crure CQ variari potest crus alterum MQ. Quo casu in formula eruta constans erit y, variabitur x, atque illuminatio crescet in ratione simplici directa arcus $QM = x$.

§. 147. Quodsi ergo fuerit $GM = MQ$, illuminatio a triangulis QCM, MCG enascens erit aequalis.

§. 148. Casus hic longe est frequentissimus, quippe circulus EQ est limbus adparens superior tectorum aedium & murorum, quibus plerumque cinguntur horti, quorumque summitas vel fastigium est horizontale.

§. 149. Ex dictis porro sequitur fore illuminationem debitam triangulo

$$CMQ = \frac{1}{2} MQ \cdot \cos. MEP.$$

$$\triangle GCM = \frac{1}{2} GM \cdot \cos. MEP.$$

$$\triangle PCB = \frac{1}{2} PB.$$

$$\triangle FCP = \frac{1}{2} FP.$$

adeoque &

$$\triangle EGF = \frac{1}{2} EF - \frac{1}{2} EG \cdot \cos. GEF.]$$

$$\triangle EQB = \frac{1}{4} \pi (1 - \cos. GEF)$$

$$\text{quadrilatero FGMP} = \frac{1}{2} FP - \frac{1}{2} GM \cdot \cos. GEF.$$

§. 150. Hinc porro facile elicietur illuminatio proueniens a triangulo qualicunque. **Fig. 16.** Uniuersalis enim erit methodus sequens. Sit ΔCBD circulus verticalis, AEB horizon, atque quaerenda sit illuminatio, quae debetur triangulo QNF , dum planum illuminandum est in centro sphaerae & horizontale. E vertice C per angulos N, Q, F demittantur verticales CND, CQD, CFD . Quo facto tria existent triangula verticalia NCQ, QCF, FCN . Quaesita ergo illuminatione tribus his triangulis debita, quod fiet ope formulae ante datae, nil amplius factu opus erit, quam ut illuminatio ΔFCN subtrahatur a summa illuminationis $\Delta NCQ, QCF$. atque remanebit illuminatio quaesita.

§. 151. Erit ergo illuminatio debita.

$$\text{triangulo } NCQ = \frac{1}{2} NQ. \cos. NSE.$$

$$\Delta QCF = \frac{1}{2} QF. \cos. FIB.$$

$$\Delta FCN = \frac{1}{2} FN. \cos. FHE.$$

adeoque illuminatio quaesita erit

$$\eta = \frac{1}{2} NQ. \cos. NSE$$

$$+ \frac{1}{2} QF. \cos. FIB - \frac{1}{2} FN. \cos. FHE.$$

§. 152. Inuenta iam illuminatione pro triangulo quocunque, ea simul dabitur pro triangulatis, quorum latera itidem sunt circuli maximi, vel eorum arcus. Haec enim cum in triangula resolvi possint, quaeri poterit illuminatio pro quouis triangulo, atque summa singularum illuminationum erit ea quae quaerebatur. Facile vero patet, hic adhiberi posse

Fig. 17. compendium sequens. Sit ΔCBD circulus verticalis, AB horizon, & $EFGHI$ pentagonum. E vertice C demittantur verticales,
 $CE,$

CE, CF, CG, CH, CI, atque per formulam §. 144. quaeratur illuminatio proveniens a triangulis verticalibus ECF, FCG, GCH, HCI, ICE, atque patet ex inspectione figurae, a summa trium priorum subtrahendam esse summam duorum posteriorum, ut habeatur illuminatio pentagono isti debita.

§. 153. Cum itaque illuminatio cuicunque sphaerae segmento circulis maximis terminato respondens reducatur ad illuminationem triangulis debitam, quorum duo crura in vertice C alterum angulum claudunt, ad haec reuertemur, ipsorum symptomata aliquando curatius perscrutaturi. Sint ergo omnia ut in

§. 142. seqq. vidimus esse $n = \frac{1}{2} x \cdot \sin y = \frac{1}{2} MQ \cdot \sin CQ$. hancque illuminationem deberi triangulo CQM, cuius crura CQ, MQ in Q rectum claudunt angulum. Videmus porro, manente crure CQ, illuminationem sequi arcum vel crus QM, adeoque sumto in circulo EQ arcu quolibet GM, demissisque verticalibus CM, CG, illuminationem triangulo GCM debitam fore $= \frac{1}{2} GM \cdot \sin CQ$.

§. 154. Patet ergo hinc illuminationem istam a duabus tantum trianguli verticalis cuiusvis GCM partibus pendere, quarum altera est crus GM vertici C oppositum, altera vero est arcus CQ vel, quod eodem recidit, complementum anguli QEB, quem mutuato ex astronomicis termino *angulum elevationis circuli EQ supra horizontem EB* vocare liceat. Quod si circulum istum EQ aequatorem esseingas, haud incongrue dixeris, illuminationem triangulo cuilibet GCM respondentem esse partem dimidiam

Fig. 15.

diam facti ex cosinu elevationis aequatoris in ipsius partem abscissam vel arcum GM.

§. 155. Non ergo pendet illuminatio in hoc casu a magnitudine vel area trianguli, quippe quae aequatur differentiae inter summam trium angulorum trianguli sphaerici & plani. Unde areae trianguli illuminatio ipsi respondens proportionalis esse nequit. Recto eodem segmento GM, eo minor fiet area ΔGCM . quo propius erit culmini Q, siue quo minor erit arcus MQ.

§. 156. Si pro GM substituatur quadrans $EQ = \frac{1}{2}\pi$, erit illuminatio a triangulo ECQ pendens $\eta = \frac{1}{4}\pi \cdot \cos. QEB = \frac{1}{4}\pi \sin CQ$. ut adeo hoc casu, crescente culminis Q depressione, illuminatio crescat ut sinus arcus CQ. Quod si hoc incrementum fuerit infinite parvum $= Qq = dy$, erit $d\eta = \frac{1}{4}\pi \cos. y \cdot dy = \frac{1}{4}\pi Qq \sin BQ$. Etsi ergo augmentum claritatis cuius sectoris infinite parvi QE q particulae MmnN debitum crescat ut sinus altitudinis MP, quippe qui sinui anguli incidentiae est aequalis, nihilominus incrementum toti sectori debitum crescat ut sinus altitudinis culminis quod utique videtur singulare. Primo enim intuitu suspicari quis potuisset, incrementum istud potius fore in ratione sinus cuiusdam intermedii, v.g. arcui PM respondentis. Quare non inutile erit in causam huius paradoxii inquirere.

§. 157. Sit ut supra (§. 143.) areola $MmnN = dy \cdot dx \cos. x$. porro fiat arcus altitudinis PM $= z$, erit illuminatio $d\eta = dy \cdot dx \cos. x \sin z$.

In

In hac formula dy est constans, adeoque erit

$$dn = dy \int dx \cdot \cos x \cdot \sin z.$$

siue

$$dn = dy \cdot \int \sin z \cdot d \sin x.$$

At vero cum sit

$$1 : \sin EM = \sin MEP : \sin MP$$

erit

$$1 : \cos x = \cos y : \sin z$$

unde

$$\sin z = \cos y \cdot \cos x.$$

At vero arcus y hic est const. quare substituendo erit

$$dn = \cos y \cdot dy \int \cos x \cdot d \sin x.$$

Quaecunque ergo sit integrale, patet istud ab arcu y non pendere, ut adeo illuminatio parti cuilibet ME debita sit in ratione sinus altitudinis culminis. Ratio ergo cur praeter expectationem res cadat, in hoc sita est, quod $\sin z$ simpliciter sit in ratione $\cos x$, quamdiu arcus y est constans. Quo fit ut dy & $\cos y$ integrale non ingrediantur.

§. 158. Quodsi tamen eiusmodi sinum intermedium quaerere volupe fuerit, rem sic adgredi datur. Primo absoluenda est integratio, eritque ut supra

$$dn = \frac{1}{2} \cos y \cdot dy \cdot (x + \sin x \cdot \cos x.)$$

Porro quaerenda area partis MQq , quae erit

$$dx \int \cos x \cdot dx = dy \cdot \sin x.$$

Haec iam per sinum istum intermedium, qui sit $= \sin \zeta$ erit multiplicanda, atque productum debet esse $= dn$. Erit ergo

$$dn = dy \cdot \sin x \cdot \sin \zeta = \frac{1}{2} \cos y \cdot dy \cdot$$

$$(x + \sin x \cdot \cos x.)$$

E §

adeo-

adeoque

$$\sin \zeta = \frac{\cos y (x + \sin x \cdot \cos x)}{2 \sin x}$$

Unde patet 1°. sinum ζ pendere ab arcu QM , huiusque sinu & cosinu. 2°. Manente arcu $QM = x$, sinum istum arcus quaesiti ζ fore in ratione sinus altitudinis culminis Q , atque 3°. ad hunc se habere ut $(x + \sin x \cdot \cos x)$ ad $\sin x$.

§. 159. Est igitur

$$\sin \zeta = \frac{\cos y \cdot x}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \cos y \cos x$$

sed

$$\cos y \cdot \cos x = \sin MP = \sin z.$$

quare

$$\sin \zeta = \frac{\cos y \cdot x}{2 \sin x} + \frac{\sin z}{2}$$

Parum igitur abest, quin $\sin \zeta$ sit medius inter extremos $\sin MP$ & $\sin QB$. Etenim pro arcibus MQ minoribus, proxime erit $x = \sin x$. adeoque & proxime

$$\sin \zeta = \frac{\cos y + \sin z}{2}$$

§. 160. Ut satis complexus est valor iste pro $\sin \zeta$ repertus, ubi sectorem QEP ponimus infinite paruum, ita prolixior adhuc eua- dit absoluta altera integratione. Sic pro triangulo GCM erit

$$\sin \zeta = \frac{\frac{1}{2} x \sin y}{CGM + CMG + MCQ - \pi}$$

angulis hisce in iis partibus sumtis, quarum unitas est sphaerae radius. Est enim fractionis huius diuisor ipsa trianguli GCM area.

§. 161.

§. 161. In examinando tertio casu generali (§. 102.) breuiiores erimus, quippe infinitos alios eosque diuersissimos complectitur, qui minus sunt obuii, difficiliusque prosequuntur calculo. Specialiores tamen casus infra occurrent, ubi de illuminatione systematis planetarii agetur. Methodum ergo, qua in hisce casibus uti licebit, si ad segmenta sphaerica reducantur, vel indicasse tantum sufficiet.

§. 162. Qualiscunque ergo fuerit figura limbi corporis luminosi, assumatur in eo punctum quoddam ceu centrum, ad quod ceterae superficiei adparentis partes referantur, vel commodè referri possint. Sumatur huius centri supra planum illuminandum eleuatio, quae sit GE , denotante nimirum $ACBD$ circulum Fig. 18. verticalem, AEB horizontem plani illuminandi atque in centro sphaerae positi. E centro G ducantur arcus, quales sunt GM , Gm , infinite vicini, atque ex conditionibus illuminationis & situs obiecti luminosi quaeratur relatio inter angulum $LG M$ & arcum GM , per aequationem exprimenda. Quo facto, ponatur ut supra (§. 130.)

$$CG = a \quad CM = z$$

$$GM = x \quad CGM = y$$

atque ope istius aequationis dabitur x per y & vicissim. Porro erit sinus anguli incidentiae pro spatiolo Mm

$$\sin MF = \cos z = \cos x \cdot \cos a + \sin a \cdot \sin x \cdot \cos y.$$

$$\& \text{ areola spatioli } Mm = dy \, dx \cdot \sin x.$$

quare illuminatio ipsi debita

$$dIn = dy \cdot \cos a \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx + \sin a \cdot \cos y \cdot dy \cdot \sin x^2 dx.$$

Posita

Posita iam y & dy const. ut habeatur illuminatio spatio $M G m$ respondens, integratio instituat, eritque

$$d\eta = \frac{1}{2} dy \cdot \cos a \cdot \sin x^2 + \frac{1}{2} \sin a \cos y \cdot (x - \sin x \cdot \cos x) \cdot dy$$

Ut vero & altera absoluat integratio, in hac formula x exprimatur per y , siue y per x , quod fiet ope aequationis inter arcum $G M$ & angulum $I G M$ repertae, & integrando dabitur η per x vel per y , quaeque erit illuminatio spatio $I G M$ debita.

§. 163. Ita v. gr. si segmentum $I M L$ fuerit circulare, erit G eius centrum, atque x erit constans. Ut adeo integrando iterum habeatur formula (§. 130.)

$$\eta = \frac{1}{2} \cos a \cdot \sin x^2 y + \frac{1}{2} \sin a \cdot \sin y (x - \frac{1}{2} \sin 2x)$$

§. 164. Si fuerit $y = x$, erit

$$d\eta = \frac{1}{2} dx \cos a \sin x^2 + \frac{1}{2} \sin a \cos x (x - \sin x \cdot \cos x) dx$$

cuius integrale addita debita constante erit

$$\eta = \frac{1}{4} x \cdot \cos a - \frac{1}{4} \cos a \cdot \int x \cdot \cos x + \frac{1}{2} \sin a (x \sin x + \cos x - \frac{1}{3} \cos x^3 - \frac{2}{3})$$

§. 165. Poterit quoque loco aequationis inter $I G M$ & $G M$ assumi alia, quae sit inter $E F$ & altitudines $F P$, $F M$. At cum singuli isti casus praeter prolixitatem calculi, nil habeant, quod concinnum esset & elegans, eos hic fusius perlustrare operae pretium non est, praesertim cum infra alia occurrant exempla huc spectantia, abstractis his iucundiora.

§. 166. Quae haecenus de illuminatione directa disseruimus, ea nituntur hypothese, superficiem corporis illuminantis, qua late patet, aequae esse luminosam, hacque praemissa, casus, qui dari possunt omnes, enumerauimus, atque hos, qui

qui frequentiores sunt, calculo fusius perlustrauimus. Quodsi vero superficies illuminans in singulis suis partibus diuersa gaudere statuatur claritate, determinanda primum erit lex, qua in longitudinem & latitudinem claritas ista decrescit. Qua data illuminatio pro qualibet particula v. gr. $MmnN$ supra re-
 perta per eam multiplicanda est claritatem, quae ipsi propria est. Post instituta integratione habebitur illuminatio toti superficiei vel datae huius parti debita. At vero cum innumeri hic dentur casus eique diuersissimi, superfluum foret, exemplis rem heic illustrare, quibus in sequentibus longe aptior erit locus. Lectorem itaque ad ea Capita remittimus, quibus de illuminatione systematis planetarii & de umbra agetur. Fig. 15.

§. 167. Antequam tamen, hisce absolutis, ad finem perducamus illuminationis directae pertractationem, supersunt, quibus paullo adhuc immorari conducit. Particulam superficiei illuminandae statuimus infinite paruam, eamque ceu unitatem spectauimus (§. 122.) ut inde ea erueretur claritas, quae huic particulae vel puncto est propria, quaeque adeo pro variis punctis est diuersa. Accidit vero subinde, ut radiorum in totam superficiem incidentium, eorumque quantitatis habenda sit ratio, independenter a claritate, quam in singulis superficiei illuminandae punctis producant. Haec enim quantitas, si per magnitudinem superficiei adparentem diuidatur, eius constituit *claritatem* veluti *mediam*. Longe vero hoc casu prolixior est calculus, quippe pro quo-

quovis superficiei illuminandae puncto, mutantur anguli incidentiae & emanationis, luminis distantia, eiusque magnitudo adparens, pluribusque casibus figura limbi adparens. Quare si uno alterove eum illustremus exemplo, neque inutile quid neque iam actum agemus.

Fig. 19. §. 168. A simplicissimo vero ut ordiamur, sit $A B M D$ circulus, cuius centro C normaliter immineat globus G , per totam superficiem aequae luminosus. Quaerenda iam sit quantitas radiorum in circulum $A B M D$ incidentium huiusque circuli claritas media. Quod ut fiat pluribus uti licebit compendiis, quae calculum mirum in modum reddunt concinnum.

I°. Illuminationem absolutam dicemus $= \pi$ (§. 133.) quae in puncto C obtineret, si globi superficies ipsi esset infinite vicina (§. 100.)

II°. Semidiametrum globi statuere licet $= 1$. quippe cum ea est centrorum G, C ab invicem distantia, illuminatio euadit absoluta.

III°. A magnitudine globi adparente animum abstrahere licet, cum demonstratum dedimus, illuminationem assumi posse in ratione distantiae centri reciproca duplicata (§. 115.)

IV°. Cum distantia ista a quovis annuli $A B M D$ spatiolo $M m n N$ sit eadem, uno velut actu habebitur radiorum in totum annulum incidentium quantitas.

§. 169. Sit igitur

distantia centrorum $C G = a$

annuli semidiameter $C N = x$

eiusdem latitudo $N M = dx$

erit

distantia $G N = \sqrt{a^2 + x^2}$

sinus anguli incidentiae $G M C =$

$$a : \sqrt{a^2 + x^2}$$

annuli area $= 2 \pi x dx$.

Vocata ergo radiorum in annulum $A B M D$ incidentium intensitate $= \eta$, quantitate $= dq$.

erit

$$\eta = \pi \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{(a^2 + x^2)}$$

crefcit enim illuminatio in ratione composita simplici illuminationis absolutae, sinus anguli incidentiae, subduplicata vero distantiae centri G . Erit ergo formulam istam reducendo

$$\eta = a \pi : (a^2 + x^2)^{3:2}$$

Quare hoc casu illuminatio dati cuiusvis spatioli $M m n N$ est reciproce ut cubus distantiae. Ut porro definiatur quantitas dq , illuminatio η per aream annuli est multiplicanda, eritque

$$dq = \eta \cdot 2 \pi x dx$$

sive substitutione facta

$$dq = \frac{2 a \pi^2 x dx}{(a^2 + x^2)^{3:2}}$$

Cuius integrale, addita debita constante, est

$$q = 2 \pi^2 [1 - a : \sqrt{a^2 + x^2}]$$

Est vero $a : \sqrt{a^2 + x^2} = G C : G N = \sin.$ anguli incidentiae quare $1 - a : \sqrt{a^2 + x^2}$ est sinus versus anguli $N G C$, qui illius est complementum. Ut adeo quantitas radiorum in circum-

lum

lum A B M D incidentium sit in ratione sinus versi anguli N G G, siue semidiametri circuli illuminati in centro sphaerae illuminantis spectati adparentis.

§. 170. Porro rotando triangulum N G C circa axin G C, recta N F G in superficie sphaerae G abscindit segmentum, cuius area erit $\equiv \pi [1 - a : \sqrt{a^2 + x^2}]$. Unde & haec area radiorum in circulum A M incidentium denotat quantitatem, quippe ipsi est proportionalis.

§. 171. Quodsi vero tandem huius areae duplum per illuminationem absolutam π multiplicetur, prodit

$$2 \pi^2 [1 - a : \sqrt{a^2 + x^2}] \equiv q.$$

quae ergo est vera radiorum quantitas.

§. 172. Posito radio circuli C M infinito, formula abibit in sequentem

$$q \equiv 2 \pi^2.$$

Erit ergo ut factum ex illuminatione absoluta siue splendore globi luminosi in duplam aream circuli sphaerae maximi. Hinc vel sua sponte fluit

THEOREMA XIII.

§. 173. *Quantitas radiorum, quos globus lucidus in planum circulare infinite extensum proiicit, eadem est ac ea, quam in casu illuminationis absolutae proiiceret in planum circulare, dimidiae superficiei ipsius globi aequale.*

DEMONSTRATIO.

Illuminatio absoluta est $\equiv \pi$ (§. 133. 168.) Adeoque π denotabit quantitatem radiorum in datum spatium $\equiv 1$ incidentium. Quodsi ergo circulus dimidiae superficiei globi aequalis absolute concipiatur illuminatus, quantitas radio-

radiorum erit $\equiv 2\pi^2$, quippe augetur ut spatia adeoque in ratione $1 : 2\pi$. At eadem est quantitas radiorum in planum circulare infinitum projectorum. Unde patet propositum.

§. 174. Ut vero rectius intelligatur hoc theorema, notandum est, eiusmodi illuminationem, si quidem ope globi luminosi statuatur producta, fictam tantum esse. Etsi enim globus centrum istius circuli contingat, erit quidem in hoc centro illuminatio absoluta, at in nullo alio puncto ea obtinebit, unde quantitas radiorum utique minor erit. Quod ut pateat, fiat $x \equiv 1$, $a \equiv 1$, atque habebitur $q \equiv 2\pi\pi(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$, cum deberet esse $\equiv 2\pi\pi$. Similiter claritas circuli media longe erit absoluta minor. Diuidendo enim $2\pi\pi(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ per aream circuli 2π , claritas ista media erit $\equiv \pi(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ quae ad tertiam partem absolutae nondum ascendit. Neque tamen eiusmodi illuminatio prorsus ficta est, cum obtineat, circulum istum hemisphaerio concauo obtegendo, cuius superficies sit aequae luminosa ac superficies globi. At ne quidem opus est ut hemisphaerio obtegatur, cum in eius vicem alia quaecunque superficies caua substitui possit. (§ 90. seqq.) Hoc ergo modo intelligenda est totius circuli illuminatio absoluta. Quod si quis huius vel alius cuiuscunque generis superficies luminosas parare velit, Phosphoro utatur vel *Pyrotechniam* consulat, ubi istas parandi docentur media. His ita praenotatis aliud subiungimus

THEOREMA XIV.

§. 175. *Quantitas radiorum, qui e tota superficie globi lucidi quaquaversum emanant eadem est ac ea, quae incidit in planum circulare absolute illuminatum, globique lucentis superficiei aequale.*

DEMONSTRATIO.

Etenim dicta globi semidiametro $= 1$, quantitas radiorum, quos in planum infinitum proicit est $= 2\pi^2$. Quodsi iam globus iste verari concipiatur intra duo huiusmodi plana sibi inuicem parallela, consequens est cunctos radios e globi superficie emanantes in alterutrum eorum incidere debere, adeoque cunctorum quantitatem esse $= 4\pi^2$, duplam nempe eius, quae in unum tantum planum incidit. At vero 4π est globi superficies, quae ergo si per illuminationem absolutam π multiplicetur, prodibit $4\pi\pi$ siue quantitas radiorum in planum circulare eiusdem magnitudinis in casu illuminationis absolutae incidentium; Quae adeo cum priori sit aequalis, constat propositum.

Aliter.

Secundam hanc superaddimus demonstrationem, quae magis est directa, priorisque fundamenta rata esse veluti exemplo probat. Globum lucidum circumdare concipiatur sphaera concentrica, cuius radius sit $= x$; patet, singulas huius sphaerae partes a globo aequae illuminari, erit vero in quouis loco illuminatio $= \pi : xx$. Quare radiorum quantitas, quae per totam sphaeram diffunditur
erit

erit $\frac{\pi}{xx} \cdot 4\pi xx$, cum illuminatio $\pi : xx$ per aream superficiei sit multiplicanda. Est vero $\frac{\pi}{xx} \cdot 4xx\pi = 4\pi\pi =$ adeoque isti radiorum quantitati aequalis, quae in planum absolute illuminatum globique superficiei aequale incidit.

§. 176. Faciliori hoc exemplo, quo illustrandus erat quantitatis radiorum computus (§. 167.) eo libentius uti lubuit, quo plura simul in eo euoluendo adhibentur Photometriae principia, atque calculi compendia. Hunc ipsum in finem sequens quoque superaddemus.

§. 177. Plano horizontali A B C D insistat Fig. 20.
aliud verticale A F E D, quod statuatur esse luminosum. Quaerenda iam sit radiorum quantitas in planum horizontale incidens. Etsi simplicissimum videatur hoc problema, attamen eius solutio longe est, quam quis crediderit intricatior. Nil enim facilius esset quam ad differentiale quarti gradus delabi, cuius quidem integratio quater repetita succederet, at calculi operosissimi taedium vel eos quoque deterreret, qui laboris sunt patientissimi. Quicquid in his obtinere mihi licuit compendii, hoc est, ut totum negotium ad differentiale secundi gradus adiuvantibus principiis supra stabilitis, reducere hacque ratione calculum ad finem perducere possem.

§. 178. His enim in auxilium vocatis, quantitatem radiorum in datum quodvis spatium M m n N e toto plano A F E D incidentium

statim obtinui, cum alias duplex ista insta-
randa fuisset integratio, quam supra uniuersa-
liter absoluimus (§. 142. seqq.) At ne hoc
quidem directe fieri licuit, siquidem breuiori
labore rem absoluere volui. Quare eam se-
quenti modo sum adgressus.

§. 179. Productis rectis FG , EH , planum
 AH concipiatur infinite altum & per singulas
partes aequae luminosum, atque ipsi substitui
poterit sector sphaericus (§. 91. seqq.) qualis
in Fig. 15. est FCP vel PCB , ita ut particula
quaelibet, cuius illuminatio est quaerenda, sit
in centro sphaerae. Simili modo rectangulo
 $A FED$ substituetur segmentum sphaericum
lateribus pyramidis $MA FED$ terminatum.
Rectis AG , PQ , DH respondebunt circuli
verticales, AD referet horizontem, & FE
aequatorem. Quodsi iam MP & PQ fuerint
ad AD normales, erit Q veluti culmen aequa-
toris & QMP eius supra horizontem eleuatio,
denique FMQ , QME erunt arcus in aequa-
tore abscissi. Has denominationes maioris
perspicuitatis ergo adhibemus (§. 154.)

§. 180. Rectae PM ducta sit infinite vicina
& parallela pN . Per punctum M transeat nor-
malis RMS , denique ducantur MA , MD ,
 MF , ME , PF , PE , RD .

Fiat porro

$$AF = a \quad AP = x \quad FMQ = v$$

$$AD = b \quad PM = y \quad FPQ = \omega$$

Illuminatio in M plano superiori $GFEH$ de-
bita sit $= \eta$, quantitas radiorum in spatiolum
 $MmnN$ incidens $= ddQ$. atque erit (§. 154.
179.) $\eta = \frac{1}{2} FME. \cos. QMP.$

qui

qui valor abit in duos sequentes

$$\eta = \frac{1}{2} F M Q. \cos Q M P + \frac{1}{2} Q M E. \cos Q M P.$$

ita ut terminus prior exhibeat quantitatem radiorum a parte sinistima, posterior vero a parte dextima in spatium $= 1$, incidentium.

Hinc erit

$$d d Q = \eta d y d x = \left(\frac{1}{2} F M Q. \cos Q M P + \frac{1}{2} Q M E. \cos Q M P \right) d y d x.$$

§. 181. Cum utraque pars huius differentialis eodem modo tractanda veniat, priorem tantum ad finem perducemus. Sit ergo quantitas radiorum ipsi debita $= d d q$, erit

$$d d q = \frac{1}{2} F M Q. \cos Q M P. d y d x.$$

sive valoribus substitutis

$$\frac{2 d d q}{d x} = v y d y : \sqrt{(y^2 + a^2)}$$

Est vero

$$\text{tang } v = x : \sqrt{(y^2 + a^2)}$$

adeoque, cum primo quaerenda sit quantitas radiorum, qui in rectangulum $P M N P$ incidunt, posita x const. erit

$$y d y = - x^2 \cot v d \cot v = - x \sqrt{(y^2 + a^2)} d \cot v.$$

Quo valore substituto prodit

$$\frac{2 d d q}{x d x} = v d \cot v$$

hinc integrando

$$\frac{2 d q}{x d x} = v \cot v - \log \sin v + \text{const.}$$

§. 182. Evanescente y , nulli amplius radii incidunt, unde fiet $d q = 0$. Sed posita $y = 0$,

F 3

erit

erit $v = \omega$, cum triangula $F M Q$, $F P Q$ coincident, erit ergo

$$\text{const} = \omega \cot \omega + l \sin \omega.$$

qua adiecta habetur

$$\frac{2 d q}{x d x} = v \cot v - l \sin v - \omega \cot \omega + l \sin \omega.$$

§. 183. Ut iam & altera absoluator integratio, qua obtinetur radiorum quantitas, quae in totum planum incidit, animaduertendum est, notam esse debere aequationem inter abscissam x & ordinatam y , quoties figura plani statuitur curvilinea, qua data, alterutra harum variabilium e differentiali eliminanda est. At hic planum ponimus esse rectangulum, unde erit y const, cum quaerenda sit radiorum quantitas ea, quae in spatium $A R M P$ incidit. Erit ergo

$$2 d q = v \cot v x d x - l \sin v. x d x - \omega \cot \omega x d x + l \sin \omega x d x$$

Sed ob

$$x = \sqrt{(y^2 + a^2)}, \text{ tang } v = a \text{ tang } \omega,$$

erit

$$x d x = (y^2 + a^2) \text{ tang } v d \text{ tang } v = a^2 \text{ tang } \omega d \text{ tang } \omega$$

adeoque substituendo

$$2 d q = (y^2 + a^2). (v d v - l \sin v. t v. d t v) - a^2 (\omega d \omega - l \sin \omega. t \omega d t \omega)$$

& integrando tandem erit

$$q = \frac{1}{2} (y^2 + a^2). (v t v - \frac{1}{2} t v^2 l \sin v + \frac{1}{2} l \cos v) - \frac{1}{2} a^2 (\omega t \omega - \frac{1}{2} t \omega^2 l \sin \omega + \frac{1}{2} l \cos \omega)$$

Quae ergo est quantitas radiorum in partem $A P M R$ a parte sinistima incidentium, Constante non est opus, cum x , v , ω & q simul evanescant.

§. 184. Eodem modo reperietur quantitas radiorum a dextima parte incidentium in spatium

$$\begin{aligned} DPMS = q = & \frac{1}{2}(y^2 + a^2) \cdot (QME. \text{tang } QME \\ & - \frac{1}{2}tQME.l \sin QME + \frac{1}{2}l \cos QME) \\ & - \frac{1}{2}a^2(QPE. \text{t}QPE - \frac{1}{2}tQPE.l \sin QPE \\ & + \frac{1}{2}l \cos QPE) \end{aligned}$$

similiter in spatium

$$\begin{aligned} DARS = \bar{q} = & \frac{1}{2}(y^2 + a^2) \cdot (FRE. \text{t}FRE \\ & - \frac{1}{2}tFRE.l \sin FRE + \frac{1}{2}l \cos FRE) - \frac{1}{2}a^2(FAE. \text{t}FAE \\ & - \frac{1}{2}tFAE.l \sin FAE + \frac{1}{2}l \cos FAE) \end{aligned}$$

Unde tandem erit quantitas in spatium RAPM ab utraque parte incidens

$$Q = q + \bar{q} = \dot{q}.$$

§. 185. Quantitas vero in totum spatium

ADSR incidens est $= 2\bar{q}$, dupla nempe eius, quae in idem spatium a parte dextima vel sinistra incidit.

§. 186. Quantitates istae debentur spatio infinito superiori GFEH. Unde mutata saltem altitudine $PQ = a$, inueniri poterunt quantitates radiorum cuilibet segmento vel rectangulo plani GADH debitae.

§. 187. Omnes istae formulae partiales ita sibi sunt similes, ut eadem angulorum respondentium functio omnes ingrediatur. Quod si ergo pars

$$\frac{1}{2}(vtv - \frac{1}{2}tv^2.l \sin v + \frac{1}{2}l \cos v)$$

quae ab angulo $v = FMQ$ pendet, brevitatis gratia dicatur $= \phi v = \phi. FMQ$. patet similem partem

$$\frac{1}{2}(\omega \cot \omega - t\omega^2.l \sin \omega + \frac{1}{2}l \cos \omega)$$

quae respondet angulo $\omega = FPQ$, exprimi posse per $\phi \omega = \phi. FPQ$. Hinc itaque contractis prolixioribus his formulis, breuissime erit

$$Q = (y^2 + a^2) \phi FMQ - a^2 \phi FPQ \\ + (y^2 + a^2) \phi FRE - a^2 \phi FAE \\ - (y^2 + a^2) \phi QME + a^2 \phi QPE.$$

sive hanc iterum contrahendo

$$Q = (y^2 + a^2).(\phi FMQ + \phi FRE - \phi QME) \\ - a^2(\phi FPQ + \phi FAE - \phi QPE)$$

§. 188. Quodsi iam plano $GFEH$ totum planum $GADH$ substituatur, dicta quantitate incidentium $= R$, erit $a = 0$, unde

$$R = y^2(\phi AMP + \phi ARD - \phi PMD)$$

Et quantitas radiorum a plano $AFED$ in planum $ARMP$ projectorum erit

$$R - Q = y^2(\phi AMP + \phi ARD - \phi PMD) \\ + a^2(\phi FPQ + \phi FAE - \phi QPE) \\ - (y^2 + a^2).(\phi FMQ + \phi FRE - \phi QME)$$

Quae quantitas erit quaerenda.

§. 189. At cum haec formula ab utroque plano eodem prorsus modo pendeat, hinc elucescit

THEOREMA XV.

§. 190. A plano AFED eadem in planum ARMP incidit radiorum quantitas, quae vicissim a plano ARMP incidit in planum AFED, si in utroque casu utrumque fuerit aequale luminosum.

DEMONSTRATIO.

Etenim comparatione instituta substitutum iri videbis

altitudini a	—	altitudinem y	
longitudini y	—	longitudinem a	
angulo AMP	—	angulum = FPQ	} & vicissim
..... ARD	—	 = FAE.	
..... PMD	—	 = QPE	
angulis FMQ FRE QME	}	—	

Unde eadem prodibit formula. Ceterum theorema hoc latius patere postea videbimus.

§. 191. Si plano ARMP substituatur totum planum ARSD, formula vehementer contrahetur, eritque

$$R - Q = 2y^2 \phi ARD + 2a^2 \phi FAE - 2(y^2 + a^2) \phi FRE.$$

§. 192. Quod si porro sumatur totum planum GADH, erit (§. 188.)

$$R = 2y^2 (\phi ARD)$$

Cui aequalis est quantitas radiorum, quos in casu secundo theorematibus praecedentis planum ARSD proiicit in planum GADE, infinite altum (§. 190.)

§. 193. Similiter si planum BADC ponatur infinite longum, manente latitudine AD,

F 5

quan-

quantitas radiorum, quos planum $A F E D$ in istud proiciet, erit $\equiv 2 a^2 \phi F A E$.

§. 194. Quodsi iam planum $A F E D$ quatuor eiusmodi claudatur lateribus, ut sit instar fundi prismatis infinite longi, patet, omnes radios ex eo emanantes in unum alterumue horum laterum incidere debere. Quare quantitas cunctorum radiorum e plano $A F E D$ emanantium erit $E \equiv 8 a^2 \phi F A E$, siue dicto angulo $F A E \equiv \gamma$, erit ista quantitas

$E \equiv 4 a^2 (\gamma \text{ tang } \gamma - \frac{1}{2} \gamma^2 \cdot l \sin \gamma + \frac{1}{2} l \cos. \gamma)$
Hoc vero tantum obtinet si latera plani $A F E D$ sint aequalia, quo casu porro erit $\gamma \equiv 45^\circ \equiv \frac{1}{4} \pi$, $\text{tang } \gamma \equiv 1$, $\sin \gamma \equiv \cos. \gamma$. adeoque formula abit in simplicissimam hanc

$$E \equiv a a \pi.$$

§. 195. Contra ea, si latera a, b fuerint inaequalia, lumen quoque in plana contigua incidens erit inaequale. Quare hoc casu habetur

$$E \equiv 4 a^2 \phi F A E + 4 b^2 \phi E A D.$$

Est vero $E A D \equiv 90^\circ - F A E \equiv \frac{1}{2} \pi - \gamma$ adeoque erit

$$E \equiv 2 a^2 \gamma \text{ tang. } \gamma - a a \gamma^2 \sin \gamma + a a l \cos. \gamma + 2 b^2 (\frac{1}{2} \pi - \gamma) \cot \gamma - b b \cot \gamma^2 l \cos. \gamma + b b l \sin. \gamma$$

Sed $a \text{ tang } \gamma \equiv b$, $b \cot \gamma \equiv a$, unde breuissime erit

$$E \equiv \pi a b.$$

Ut adeo & hic emanatio & illuminatio absoluta eadem constet radiorum quantitate. Quod iam de illuminatione reciproca quacunque demonstrabimus. (§. 129.)

THEOREMA XVI.

§. 196. Si duae sint superficies ALKD, Fig. 21.
FEI aequae luminosae sibiue mutuo utcunque
obuerlae, quantitas radiorum ex unaquaque
in alteram incidentium est aequalis.

DEMONSTRATIO.

I^o Concipiantur duae particulae infinite parvae
AH, GF, quantitas radiorum ex alteru-
tra in alteram incidentium exprimetur
per factum ex utraque area, sinu anguli
incidentiae & sinu anguli emissionis. At
vero in utroque casu areae sunt eaedem,
& sinus isti reciprocantur, quare factum
hoc cum in utroque casu sit idem, patet
tot ex AH in GF incidere radios, quot ex
GF in AH incidunt.

II^o Manente particula AH evidens est, idem
locum habere de quavis alia superficie
FEI particula, unde singulis istis illumi-
nationibus in summam contractis, ex to-
ta superficie FEI in particulam AH ea-
dem incidet radiorum quantitas, quae
vice versa e spatio AH in superficiem
FEI incidit.

III^o Quod idem cum de singulis superficie
ALKD spatiolis valeat, similiter de ea-
rum summa valebit. Constat ergo pro-
positum.

§. 197. Cum itaque utraque quantitas una
eademque opera determinetur, insigne nobis
hoc theorema in uniuersa Photometria sub-
ministrat calculi compendium. Non modo
enim iteratae ipsius instaurationi superfedere
lice-

licebit, verum & quoties alteruter casus fuerit altero difficilior, hunc veluti invertendo, faciliorem perlustrare sufficiet.

§. 198. Quodsi loco alterutrius superficiei tantummodo consideretur eius particula infinite parva, qualis ponitur esse $A N$, non opus erit ut huius areolam in calculum inducamus, nisi aliae id suadeant rationes. Sumere enim licebit spatiolum, quod ponitur $\equiv 1$, atque calculum subducendo determinabitur quantitas radiorum e spatiolo isto in datam superficiem $E I F$ vel ex hac in illud incidentium. Quodsi vero iam spatiolo isti substituenda sit ea magnitudo, quam requirit calculi institutum, v. gr. $d q$, $d x$ &c. facile patet, quantitatem radiorum per hanc aream esse multiplicandam.

§. 199. Binis exemplis haecenus expositis tertium iungamus eo curatius evoluendum, quo in sequentibus amplior est eius usus, cum de claritate imaginis in foco lentium & speculorum occurret quaestio. Infiniti enim in his casibus dantur coni luminosi obliqui, ut adeo in antecessum determinanda sit radiorum quantitas, qua singuli gaudent.

Fig. 22. §. 200. Sit ergo $B H G F$ circulus planus luminosus, vel illuminandus, quem maioris perspicuitatis ergo horizontalem esse ponemus. In A sit particula superficiei plano circuli parallelae vel horizontalis, quaeue circulum $B G$ vel illuminet, vel ab eo illuminetur, patet radios emanantes vel incidentes constituere conum luminosum obliquum, cuius basis est circulus $B H G$, & axis $A C$ ad basin erit inclinatus

natus. Cumque superficies in A sit basi parallela, axis CA ad eam eodem modo erit inclinatus. Quod idem cum obtineat pro quibuscumque aliis rectis PA, patet, angulos emanationis & incidentiae esse aequales. Recta AD sit verticalis, & ad eam ducatur normalis CD, erit D punctum A veluti in planum circuli BHG proiectum, & DAC erit inclinatio axeos AC. Denique area spatiosi A dicatur $= 1$.

§. 201. Sumto iam puncto quolibet P, ductaque AP, patet rotatione trianguli DPA circa axin AD, punctum P percurrere arcum MPN, cui si eodem modo descriptus concipiatur infinite vicinus mpn, habebitur segmentum annulare MNnm, atque radii ipsi debiti sub iisdem angulis emanant & incidunt. Quaeritur iam primo eorum quantitas, quam dicemus $= dq$.

§. 202. Quod ut fiat, ponatur

altitudo verticis $DA = 1$.

Distantia centri $CD = a$.

semidiameter $CB = x$.

Porro ductis DM, MC vocetur.

distantia DP $= DM = z$.

angulus MDC $= v$.

. MCX $= \xi$.

. DAP $= \omega$.

erit

$$z = \text{tang } \omega$$

$$AP = \sqrt{1 + zz} = \text{sec. } \omega.$$

$$\text{area MNnm} = 2vzdz = 2v \sin \omega . d\omega : \cos. \omega^3.$$

Adeoque cum quantitas radiorum sit directe

ut area & sinus angulorum emanationis & incidentiae, reciproce ut quadratum distantiae habebimus.

$$dq = 2v. \frac{\sin \omega d\omega.}{\cos. \omega^3} \cos. \omega. \cos. \omega : \sec. \omega^2.$$

siue debita facta reductione

$$dq = 2v. \sin \omega. d \sin \omega$$

Unde fit

$$dq = d(v \sin \omega^2) - \sin \omega^2 dv.$$

§. 203. Est vero pro triangulo MDC

$$2az \cos. v = z^2 + a^2 - x^2.$$

Posita breuitatis ergo

$$a^2 = b^2 + x^2$$

erit

$$2a \cos. v = z + bb : z$$

hinc vero

$$-dv = \frac{zdz - bbdz : z}{\sqrt{(4a^2z^2 - (zz + bb)^2)}}$$

Et ob

$$\sin \omega^2 = zz : (1 + zz)$$

erit

$$-f. \omega^2. dv = \frac{(zz - bh) zdz}{(1 + zz) \sqrt{(4a^2z^2 - (zz + bb)^2)}}$$

Fiat porro $(zz + bb) = 2y + 2aa$,

$$\text{siue } zz = 2y + aa + xx.$$

erit

$$-f. \omega^2 dv = \frac{(xx + y) dy}{(1 + a^2 + x^2 + 2y) \sqrt{(a^2x^2 - y^2)}}$$

Ut

Ut vero & haec formula reddatur concinnior,
primo diuisione mutetur in sequentem

$$-\int \omega^2 dv = \frac{dy}{\sqrt{(a^2x^2 - y^2)} (1 + bb) dy} \\ = \frac{(1 + a^2 + x^2 + y^2) \sqrt{(a^2x^2 - y^2)}}{(1 + bb) dy}$$

§. 204. Deinde fiat

$$1 + bb = 2cax \text{ siue } c = (1 + bb) : 2ax \\ 1 + a^2 + x^2 = 2eax \text{ siue } e = (1 + a^2 + x^2) : 2ax \\ -y = ax - s \text{ siue } s = y : ax = \frac{aa + xx - 2x}{2ax}$$

Atque substitutione facta prodibit

$$-2\int \omega^2 dv = \frac{ds}{\sqrt{(1 - ss)}} - \frac{cds}{(e + s)\sqrt{(1 - ss)}}$$

Unde statim patet, s debere esse sinum arcus
cuiusdam circularis siue anguli. At vero si
eius valor

$$s = \frac{aa + xx - 2x}{2ax}$$

cum triangulo DMC conferatur, facile reper-
itur esse

$$\frac{aa + xx - 2x}{2ax} = \cosin MCD.$$

Unde habetur

$$s = \cosin MCG = \sin HMC = \sin \xi.$$

§. 205. Erit ergo substitutione facta

$$-2\sin \omega^2 dv = d\xi - \frac{cd\xi}{e + \sin \xi}$$

siue

$$dq = d(v \sin \omega^2) + \left(d\xi - \frac{cd\xi}{e + \sin \xi} \right)$$

§. 206.

Unde

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \sqrt{\frac{\sec^4 \phi}{\sec^4 \phi + 4 \tan \phi^2 \tan w^2}} \right)$$

siue

$$Q = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 w^2 \sin^2 2\phi^2}}$$

Ex puncto E ducatur recta talis ut angulus $\angle DKA$ sit $= 2\phi = 2\angle DAE$, erit

$$DE^2 : KE^2 = \sin^2 2\phi^2$$

$$EC^2 : KE^2 = \sin^2 2\phi^2 \cdot \tan^2 w^2.$$

$$CK^2 : KE^2 = 1 + \sin^2 2\phi^2 \tan^2 w^2.$$

Unde $Q = \frac{1}{2}\pi (1 - \cos \angle CKE) = \pi (\sin^2 \frac{1}{2} \angle CKE)$

§. 209. In toto hoc calculo altitudinem vel distantiam planorum AD per unitatem expressimus, quod utique facere licuit (§. 91. 92.) Ad eam tamen in hoc casu ceterae rectae sunt reuocandae. Quare ut cuicunque formula ante erutata adaptetur mensurae, dicta AD $\doteq$ h, euidens est, fore

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \frac{b^2 + a^2 - x^2}{\sqrt{((b^2 + a^2 - x^2)^2 + 4x^2 b^2)}} \right]$$

§. 210. Quantitas radiorum Q debetur toti circulo BHGF, siue ex hoc incidant in spatiolum $A=1$, siue ex hoc spatiolo in circulum irruant. Priori casu habetur ipsa claritas vel illuminatio particulae A, cum huius aream summus esse $= 1$. Ut iam consensus formulae erutae cum superioribus ostendatur, eam ad casus quosdam adplicabimus.

§. 211. Ponatur $a=0$, Centrum circuli C cadet in verticem D, atque erit

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{bb - xx}{bb + xx} \right) = \frac{\pi xx}{bb + xx}$$

Est vero $xx : (bb + xx)$ quadratum sinus semidiametri adparentis, huic igitur quantitas Q erit proportionalis. Quod convenit cum supra demonstratis (§. 109. 121.)

§. 212. Si fiat $a=b=0$, erit $Q=\pi$. obtinet ergo illuminatio vel emanatio absoluta. (§. 100. 123.)

§. 213. Ponendo semidiametrum x infinite parvam, habebitur

$$Q = \frac{b b x x \pi}{(b b + a a)^2}$$

Est vero $\pi x x$ circuli area vera, $\pi x x . b : (b b + a a)^{3/2}$ eius magnitudo adparens, & $b : \sqrt{(b b + a a)}$ sinus anguli incidentiae, unde Q est factum ex hoc sinu in aream adparentem, quod vel per se est evidens.

§. 214. Sit iam circulus MDE cuius centro A verticaliter immineat centrum circuli BC ipsi MDE paralleli, erit AC axis per utriusque circuli centrum normaliter transiens. Posito iam alterutro luminoso, quaeritur quantitas radiorum in alterum incidentium. Quod ut fiat dicatur

Distantia circulorum $AC=b$

semidiameter illuminantis $CB=b$

semidiameter illuminati $AM=x$

Circulo MED ductus concipiatur infinite vicini m & concentricus atque in Mm sumatur

spatiolum, quod sit $= 1$, erit densitas radiorum in hoc spatiolum incidens (209.)

$$= \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{(bb - bb + xx)}{\sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)}} \right]$$

Quae densitas cum per totum annulum MDE sit eadem, erit radiorum in eum incidentium quantitas ut eius area. At haec est $= 2\pi x dx$, adeoque dicta quantitate $= dq$, erit

$$dq = \pi \pi \left[x dx - \frac{(bb - bb + xx) x dx}{\sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)}} \right]$$

Cuius integrale est

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [xx - \sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)} + \text{const.}]$$

§. 215. Constans habetur ponendo q & x simul evanescere. Quare erit $= (bb + bb)$, qua addita

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [xx + bb + bb - \sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)}]$$

siue hac aequatione debite reducta

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [bb + bb + xx - \sqrt{((bb + bb + xx)^2 - 4x^2b^2)}]$$

Qui valor est radix aequationis

$$q^2 - \pi^2 (bb + bb + xx) q + x^2 b^2 \pi^4 = 0$$

§. 216. Cum haec aequatio ab utroque radio b & x aequè pendeat, patet, eandem prodire radiorum quantitatem, uter circulorum statuatur luminosus (§. 196.)

§. 217. At formulam erutam

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [bb + xx + bb - \sqrt{((bb + xx + bb)^2 - 4x^2b^2)}]$$

eleganter contrahere licet. Sint enim BCF, MA parallelae, ducanturque MB, MF, erit

$$MB^2 = bb + bb + xx - 2bx$$

$$MF^2 = bb + bb + xx + 2bx$$

adeoque

$$\frac{MB^2 + MF^2}{2} = bh + bb + xx.$$

$$MB^2 MF^2 = (bh + bb + xx)^2 - 4bbxx$$

His valoribus substitutis, non modo tollitur irrationalitas, verum & formula abit in quadratum purum, eritque

$$q = \frac{1}{4}\pi\pi(MF - MB)^2.$$

Unde fuit

THEOREMA XVII.

§. 218. Sit BMEF conus luminosus talis, ut segmentorum BF, ME ad axin CA normalium, alterum ab altero illuminetur, ducta MF, factaque $MG = MB$, dico, quantitatem radiorum conii istius fore aequalem facto ex illuminatione absoluta π in aream circuli, cuius diameter $= GF$.

Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Est enim vi § praecedentis

$$q = \frac{1}{4}\pi\pi(MF - MB)^2$$

Sed per constructionem

$$MF - MB = GF$$

Unde

$$q = \frac{1}{4}\pi\pi GF^2$$

Est vero π illuminatio absoluta (§. 123.) & $\frac{1}{4}\pi GF^2$ area circuli, cuius diameter $= GF$. Constat ergo propositum. Nec minus concinnum est sequens

THEOREMA XVIII.

219. Ea est in cono luminoso MBFE radiorum quantitas, quae in casu illuminationis absolutae incidet in spatium circuli, cuius diameter $= GF$.

G 3

DE-

DEMONSTRATIO.

Etenim π est quantitas radiorum, quae in casu illuminationis absolutae incidit in spatium $= 1$, adeoque $q = \frac{1}{4}\pi\pi$. GF^2 erit quantitas in eodem casu in spatium $= \frac{1}{4}\pi GF^2$ incidens. At vero hoc spatium est area circuli, cuius diameter $= GF$. Quare patet propositum.

THEOREMA XIX.

§. 220. Si segmentum BF a segmento ME illuminetur, claritas ipsius BF media est ad eius claritatem in casu illuminationis absolutae, ut FG^2 ad FB^2 .

DEMONSTRATIO.

Etenim claritas media habetur, quantitatem radiorum coni luminosi MBFE per aream segmenti BC dividendo. Est vero area $= \frac{1}{4}\pi$. BF^2 , & quantitas radiorum (§. 218.) $= \frac{1}{4}\pi^2 GF^2$, unde claritas media $= GF^2$. $\pi : BF^2$. Cum iam illuminatio absoluta sit π erit

$$\frac{\pi GF^2 : \pi}{BF^2} = FG^2 : FB^2.$$

Quod erat demonstrandum.

§. 221. Vel me tacente patet idem valere de segmento MDE, si hoc a segmento BF illuminetur (§. 215.) Erit enim claritas media ad claritatem in casu illuminationis absolutae ut FG^2 ad ME^2 . Porro ob $FE = BM$, erit quoque $FM - FE = FM - BM = FG$. (§. 218.) ut adeo perinde sit siue triangulo MBF siue altero MFE utaris, cum hic tantummodo crurum differentia spectanda veniat.

§. 222.

§. 222. Cum porro per constructionem quatuor puncta B, M, E, F sint in circulo, erit

$$BE \cdot MF = BM \cdot FE + BF \cdot ME$$

Sed est

$$BE = ME$$

$$BM = FE$$

quare

$$MF^2 = BM^2 + BF \cdot MF$$

unde fit

$$(MF - BM) = \frac{BF \cdot ME}{MF + BM} = GF$$

Est vero (§. 218.)

$$q = \frac{1}{4} \pi \pi \cdot GF^2$$

Quare erit

$$\pi \pi \cdot BF^2 \cdot ME^2$$

$$q = \frac{\pi \pi \cdot BF^2 \cdot ME^2}{4(MF + BM)^2}$$

Recta GF bifariam sectetur in H, erit

$$MH = \frac{1}{2}(MF + BM)$$

adeoque

$$q = \pi \pi \frac{(BC^2 \cdot MA^2)}{MH^2}$$

Unde iterum fuit

THEOREMA XX.

§. 223. Si $MH = \frac{1}{2}(MB + MF)$ spectetur ut unitas, dicta illuminatione absoluta $= \pi$, quantitas radiorum in cono luminoso MBFE erit factum ex area segmenti illuminantis in aream segmenti illuminati.

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$\pi \cdot BC^2 = \text{areae segmenti BCE.}$$

$$\pi \cdot MA^2 = \text{areae segmenti MDE.}$$

Quare cum ponatur $MH = 1$. erit

$$q = \pi BC^2 \cdot \pi \cdot MA^2$$

adeoque ut factum alterutrius areae in alteram (§. 219.)

THEOREMA XXI.

§. 224. *Claritas media segmenti illuminati erit ad claritatem in casu illuminationis absolutae, ut quadratum semidiametri segmenti illuminantis ad quadratum rectae MH.*

DEMONSTRATIO.

Habetur enim claritas media, quantitatem radiorum per aream illuminatam dividendo. Dicta ergo claritate media $= c$, erit, si planum BF illuminetur,

$$c = \frac{q}{\pi \cdot BC^2} = \frac{\pi \cdot AM^2}{MH^2}$$

unde fit

$$c : \pi = AM^2 : MH^2$$

Si vero illuminetur segmentum MDE, erit

$$c = \frac{q}{\pi \cdot MA^2} = \frac{\pi \cdot BC^2}{MH^2}$$

quare

$$c : \pi = BC^2 : MH^2.$$

Pro utroque ergo casu constat theorematibus effectum.

§. 225. Quodsi MH transferatur ex Min K, & ex F in I, erit claritas media

$$\text{segmenti MDE} = \pi \cdot (\sin KIF)^2$$

$$\text{segmenti BF} = \pi \cdot (\sin MKI)^2$$

Unde

Unde patet theorematibus praesentis cum theoremate V. (§. 109.) consensus & analogia. Anguli enim MKI, KIF sunt semidiametri adparentes segmentorum illuminantium, si e punctis K & I spectentur.

CAPVT III.

Experimentis ad examen reuocatur oculi iudicium, primaque firmanur Photometriae principia.

§. 226. Quae in superioribus (§. 54. 55.) dubia videri posse diximus, prima, quibus Photometria superstruitur fundamenta, ea iam veluti extrema tentando non populari, quod aiunt trutina, verum aurificis statera examinare propositum est, ut firma sint nec ne euidens fiat, quam quod euidetissimum. Eo quoque lubentius in hanc descendimus arenam, quo amplior est usus methodi, qua in hoc negotio erit utendum, ut res omnis ad liquidum perducatur.

§. 227. Principia vero, quorum hic examinanda est veritas, haec sunt.

I^o Illuminationem maiorem esse in ratione numeri candelarum, vel luminum, vel punctorum radiantium, a quibus charta vel planum ipsis obiectum collustratur.

II^o Eandem esse eo minorem, quo maius est quadratum distantiae plani illuminati a corpore luminoso.

III^o Eam decrescere in ratione sinus anguli incidentiae.

§. 206. Ut porro ultimum membrum huius aequationis ab irrationalitate liberetur, ponatur.

$$\text{tang } \frac{1}{2} \xi = \zeta$$

eritque

$$\sin \xi = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}$$

$$d\xi = \frac{2d\zeta}{1+\zeta^2}$$

adeoque

$$\frac{cd\xi}{e + \sin \xi} = \frac{2cd\zeta}{e + e\zeta^2 + 2\zeta}$$

Cuius integrale est

$$\frac{2c}{\sqrt{(ee-1)}} \text{Arc. tang.} \left(\frac{e\zeta+1}{\sqrt{(ee-1)}} \right)$$

Unde adeo

$$q = v \sin \omega^2 + \frac{1}{2} \xi - \frac{c}{\sqrt{(ee-1)}} \text{Arc tang} \frac{e\zeta+1}{\sqrt{(ee-1)}} + \text{Const.}$$

Constans sic addenda ut q evanescat, cum fuerit $z = DB$. Erit vero hoc casu $v = 0$, $\xi = \frac{1}{2} \pi$, $\zeta = -1$, adeoque

$$\text{Const.} = + \frac{1}{4} \pi - \frac{c}{\sqrt{(ee-1)}} \text{Arc. tang.} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$$

Ut adeo quantitas radiorum spatio lenticulari MBNP debita sit

$$q = v \sin \omega^2 + \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{4} \pi - \frac{c}{\sqrt{(ee-1)}} \left(\text{Arc. tang.} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} + \text{Arc. tang.} \frac{e\zeta+1}{\sqrt{(ee-1)}} \right)$$

§. 207. Quodsi iam quaeratur quantitas radiorum pro toto circulo, faciendum $z = DG$, unde erit $v = 0$, $\xi = +\frac{1}{2}\pi$, $\zeta = +1$. adeoque

$$Q = \frac{1}{2}\pi - \frac{c}{\sqrt{ee-1}} \left(\text{Arc.tang.} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} + \text{A.t.} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \right)$$

At vero ob $\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = 1 : \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$, erit arcus alter alterius complementum, ut adeo utriusque summa sit quadrans $= \frac{1}{2}\pi$, adeoque formula ita contrahetur, ut pro toto circulo sit

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{c}{\sqrt{ee-1}} \right)$$

Est vero

$$c = \frac{1+a^2-x^2}{2ax}$$

$$e = \frac{1+a^2+x^2}{2ax}$$

Unde substituendo tandem fit

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \frac{1+a^2-x^2}{\sqrt{(1+a^2-x^2)^2 + 4xx}} \right]$$

Qua ergo aequatione quantitas radiorum pro toto circulo datur per rectas AD, DC, BC, quae omnium facillime innotescunt.

§. 208. Dabitur vero quoque per angulos. Ducta enim tangente DE, ad eam demittatur normalis CDE, & iungantur EA. Dicto iam angulo CDE = w , DAE = ϕ , erit

$$DE^2 = a^2 - x^2 = \text{tang } \phi^2.$$

$$AE^2 = 1 + a^2 - x^2 = \text{sec } \phi^2$$

$$CE = x = \text{tang.} \phi \text{ tang } w.$$

G

Unde

Unde

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \sqrt{\frac{\sec \phi^4}{\sec \phi^4 + 4 \tan \phi^2 \tan w^2}} \right)$$

siue

$$Q = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 w^2 \sin^2 2\phi^2}}$$

Ex puncto E ducatur recta talis ut angulus DKA sit $= 2\phi = 2\text{DAE}$, erit

$$\text{DE}^2 : \text{KE}^2 = \sin^2 2\phi^2$$

$$\text{EC}^2 : \text{KE}^2 = \sin^2 2\phi^2 \cdot \tan^2 w^2.$$

$$\text{CK}^2 : \text{KE}^2 = 1 + \sin^2 2\phi^2 \tan^2 w^2.$$

$$\text{Unde } Q = \frac{1}{2}\pi (1 - \cos \angle \text{CKE}) = \pi \left(\sin \frac{1}{2} \angle \text{CKE} \right)^2$$

§. 209. In toto hoc calculo altitudinem vel distantiam planorum AD per unitatem expressimus, quod utique facere licuit (§. 91. 92.) Ad eam tamen in hoc casu ceterae rectae sunt reuocandae. Quare ut cuicunque formula ante erutata adaptetur mensurae, dicta AD $\doteq$ h, euidens est, fore

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \sqrt{\frac{b^2 + a^2 - x^2}{(b^2 + a^2 - x^2)^2 + 4x^2 b^2}} \right]$$

§. 210. Quantitas radiorum Q debetur toti circulo BHGF, siue ex hoc incidant in spatiolum $A=1$, siue ex hoc spatiolo in circulum itruant. Priori casu habetur ipsa claritas vel illuminatio particulae A, cum huius aream summus esse $= 1$. Ut iam consensus formulae erutae cum superioribus ostendatur, eam ad casus quosdam adplicabimus.

§. 211. Ponatur $a = 0$, Centrum circuli C cadet in verticem D, atque erit

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{bh - xx}{bh + xx} \right) = \frac{\pi xx}{bh + xx}$$

Est vero $xx : (bh + xx)$ quadratum sinus semidiametri adparentis, huic igitur quantitas Q erit proportionalis. Quod convenit cum supra demonstratis (§. 109. 121.)

§. 212. Si fiat $a = b = 0$, erit $Q = \pi$. obtinet ergo illuminatio vel emanatio absoluta. (§. 100. 123.)

§. 213. Ponendo semidiametrum x infinite parvam, habebitur

$$Q = \frac{bhxx\pi}{(bh + aa)^2}$$

Est vero πxx circuli area vera, $\pi xx. b : (bh + aa)^{3/2}$ eius magnitudo adparens, & $b : \sqrt{(bh + aa)}$ sinus anguli incidentiae, unde Q est factum ex hoc sinu in aream adparentem, quod vel per se est evidens.

§. 214. Sit iam circulus MDE cuius centro A verticaliter immineat centrum circuli BC ipsi MDE paralleli, erit AC axis per utriusque circuli centrum normaliter transiens. Posito iam alterutro luminoso, quaeritur quantitas radiorum in alterum incidentium. Quod ut fiat dicatur

Distantia circulorum $AC = b$

semidiameter illuminantis $CB = b$

semidiameter illuminati $AM = x$

Fig. 23.

Circulo MED ductus concipiatur infinite vicinus m e concentricus atque in Mm sumatur

spatiolum, quod sit $= 1$, erit densitas radiorum in hoc spatiolum incidens (209.)

$$= \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{(bb - bb + xx)}{\sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)}} \right]$$

Quae densitas cum per totum annulum MDE sit eadem, erit radiorum in eum incidentium quantitas ut eius area. At haec est $= 2\pi x dx$, adeoque dicta quantitate $= dq$, erit

$$dq = \pi \pi \left[x dx - \frac{(bb - bb + xx)x dx}{\sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)}} \right]$$

Cuius integrale est

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [xx - \sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)} + \text{const.}]$$

§. 215. Constans habetur ponendo q & x simul evanescere. Quare erit $= (bb + bb)$, qua addita

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [xx + bb + bb - \sqrt{(4b^2b^2 + (bb - bb + xx)^2)}]$$

siue hac aequatione debite reducta

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [bb + bb + xx - \sqrt{((bb + bb + xx)^2 - 4x^2b^2)}]$$

Qui valor est radix aequationis

$$q^2 - \pi^2 (bb + bb + xx)q + x^2b^2\pi^4 = 0$$

§. 216. Cum haec aequatio ab utroque radio b & x aequae pendeat, patet, eandem prodire radiorum quantitatem, uter circulorum statuatur luminosus (§. 196.)

§. 217. At formulam erutam

$$q = \frac{1}{2} \pi \pi [bb + xx + bb - \sqrt{((bb + xx + bb)^2 - 4x^2b^2)}]$$

eleganter contrahere licet. Sint enim BCF, MA parallelae, ducanturque MB, MF, erit

$$MB^2 = bb + bb + xx - 2bx$$

$$MF^2 = bb + bb + xx + 2bx$$

adeoque

$$\frac{MB^2 + MF^2}{2} = bb + bb + xx.$$

$$MB^2 MF^2 = (bb + bb + xx)^2 - 4bbxx$$

His valoribus substitutis, non modo tollitur irrationalitas, verum & formula abit in quadratum purum, eritque

$$q = \frac{1}{4}\pi\pi(MF - MB)^2.$$

Unde fluit

THEOREMA XVII.

Fig. 24.

§. 218. Sit BMEF conus luminosus talis, ut segmentorum BF, ME ad axin CA normalium, alterum ab altero illuminetur, ducta MF, factaque $MG = MB$, dico, quantitatem radiorum coni istius fore aequalem facto ex illuminatione absoluta π in aream circuli, cuius diameter $= GF$.

DEMONSTRATIO.

Est enim vi § praecedentis

$$q = \frac{1}{4}\pi\pi(MF - MB)^2$$

Sed per constructionem

$$MF - MB = GF$$

Unde

$$q = \frac{1}{4}\pi\pi GF^2$$

Est vero π illuminatio absoluta (§. 123.) & $\frac{1}{4}\pi \cdot GF^2$ area circuli, cuius diameter $= GF$. Constat ergo propositum. Nec minus concinnum est sequens

THEOREMA XVIII.

219. Ea est in cono luminoso MBFE radiorum quantitas, quae in casu illuminationis absolutae incidet in spatium circuli, cuius diameter $= GF$.

DEMONSTRATIO.

Etenim π est quantitas radiorum, quae in casu illuminationis absolutae incidit in spatium $= 1$, adeoque $q = \frac{1}{4}\pi\pi$. GF^2 erit quantitas in eodem casu in spatium $= \frac{1}{4}\pi GF^2$ incidens. At vero hoc spatium est area circuli, cuius diameter $= GF$. Quare patet propositum.

THEOREMA XIX.

§. 220. Si segmentum BF a segmento ME illuminetur, claritas ipsius BF media est ad eius claritatem in casu illuminationis absolutae, ut FG^2 ad FB^2 .

DEMONSTRATIO.

Etenim claritas media habetur, quantitatem radiorum coni luminosi MBFE per aream segmenti BC dividendo. Est vero area $= \frac{1}{4}\pi \cdot BF^2$, & quantitas radiorum (§. 218.) $= \frac{1}{4}\pi^2 GF^2$, unde claritas media $= GF^2 \cdot \pi : BF^2$. Cum iam illuminatio absoluta sit π erit

$$\pi GF^2 : \pi = FG^2 : FB^2.$$

$$\frac{BF^2}{BF^2}$$

Quod erat demonstrandum.

§. 221. Vel me tacente patet idem valere de segmento MDE, si hoc a segmento BF illuminetur (§. 215.) Erit enim claritas media ad claritatem in casu illuminationis absolutae ut FG^2 ad ME^2 . Porro ob $FE = BM$, erit quoque $FM - FE = FM - BM = FG$. (§. 218.) ut adeo perinde sit siue triangulo MBF siue altero MFE utaris, cum hic tantummodo crurum differentia spectanda veniat.

§. 222.

§. 222. Cum porro per constructionem quatuor puncta B, M, E, F sint in circulo, erit

$$BE \cdot MF = BM \cdot FE + BF \cdot ME$$

Sed est

$$BE = MF$$

$$BM = FE$$

quare

$$MF^2 = BM^2 + BF \cdot MF$$

unde fit

$$(MF - BM) = \frac{BF \cdot ME}{MF + BM} = GF$$

Est vero (§. 218.)

$$q = \frac{1}{4} \pi \pi \cdot GF^2$$

Quare erit

$$q = \frac{\pi \pi \cdot BF^2 \cdot ME^2}{4(MF + BM)^2}$$

Recta GF bifariam sectetur in H, erit

$$MH = \frac{1}{2}(MF + BM)$$

adeoque

$$q = \pi \pi \frac{(BC^2 \cdot MA^2)}{MH^2}$$

Unde iterum fuit

THEOREMA XX.

§. 223. Si $MH = \frac{1}{2}(MB + ME)$ spectetur ut unitas, dicta illuminatione absoluta $= \pi$, quantitas radiorum in cono luminoso MBFE erit factum ex area segmenti illuminantis in aream segmenti illuminati.

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$\pi \cdot BC^2 = \text{areae segmenti BCF.}$$

$$\pi \cdot MA^2 = \text{areae segmenti MDE.}$$

Quare cum ponatur $MH = r$. erit

$$q = \pi BC^2 \cdot \pi \cdot MA^2$$

adeoque ut factum alterutrius areae in alteram (§. 219.)

THEOREMA XXI.

§. 224. *Claritas media segmenti illuminati erit ad claritatem in casu illuminationis absolutae, ut quadratum semidiametri segmenti illuminantis ad quadratum rectae MH.*

DEMONSTRATIO.

Habetur enim claritas media, quantitatem radiorum per aream illuminatam dividendo. Dicta ergo claritate media $= c$, erit, si planum BF illuminetur,

$$c = \frac{q}{\pi \cdot BC^2} = \frac{\pi \cdot AM^2}{MH^2}$$

unde fit

$$c : \pi = AM^2 : MH^2$$

Si vero illuminetur segmentum MDE, erit

$$c = \frac{q}{\pi \cdot MA^2} = \frac{\pi \cdot BC^2}{MH^2}$$

quare

$$c : \pi = BC^2 : MH^2.$$

Pro utroque ergo casu constat theorematibus effectum.

§. 225. Quodsi MH transferatur ex Min K, & ex F in I, erit claritas media

$$\text{segmenti MDE} = \pi \cdot (\sin KIF)^2$$

$$\text{segmenti BF} = \pi \cdot (\sin MKI)^2$$

Unde

Unde patet theorematibus praesentis cum theoremate V. (§. 109.) consensus & analogia. Anguli enim MKI, KIF sunt semidiametri adparentes segmentorum illuminantium, si e punctis K & I spectentur.

CAPVT III.

Experimentis ad examen reuocatur oculi iudicium, primaque firmanur Photometriae principia.

§. 226. Quae in superioribus (§. 54. 55.) dubia videri posse diximus, prima, quibus Photometria superstruitur fundamenta, ea iam veluti extrema tentando non populari, quod aiunt trutina, verum aurificis statera examinare propositum est, ut firma sint nec ne euidens fiat, quam quod euidetissimum. Eo quoque lubentius in hanc descendimus arenam, quo amplior est usus methodi, qua in hoc negotio erit utendum, ut res omnis ad liquidum perducatur.

§. 227. Principia vero, quorum hic examinanda est veritas, haec sunt.

I^o Illuminationem maiorem esse in ratione numeri candelarum, vel luminum, vel punctorum radiantium, a quibus charta vel planum ipsis obiectum collustratur.

II^o Eandem esse eo minorem, quo maius est quadratum distantiae plani illuminati a corpore luminoso.

III^o Eam decrescere in ratione sinus anguli incidentiae.

§. 228. Nullam harum legum seorsim experimentis firmari posse, iam monuimus (§. 54.) Vidimus porro, una earum admissa, ceteris quoque experientiam calculum adiacere, ut adeo mutuo sese vel probent vel destruant. (§. 55.) Prius vero obtineat an posterius hoc est, in quod paullo curatius inquiremus. Quem in finem harum legum primam cum secunda, postea quoque cum tertia comparabimus, ut earum nexus clarius pateat.

§. 229. Resumamus itaque Experimentum, quod supra (§. 58.) descripsimus primum vel quod ipsi analogum est secundum (§. 59.) Quicquid ex eo, absque hypothesis concludere licet, eo recidit, *ut eadem prodeat illuminatio, si numerus candelarum fuerit in ratione duplicata distantiae.* Haec positio cum adeo necessario inde fluat, ut ea reiecta, manente aequalitate claritatis candelarum & albedine plani quo lumen normaliter incidens excipitur, aequalis illuminatio obtineri non possit; ita ipsa instar axiomatis utemur.

Fig. 2.

§. 230. Ut tamen methodus qua utemur, in antecessum exemplo faciliori illustretur, ponemus experimentum ita fuisse institutum ut numerus candelarum in A semper duplum esset earundem numeri in K, utque adeo in omni casu distantia KC esset ad distantiam AB = 1 : $\sqrt{2}$. Quaeritur, qua ratione hinc conclusionem inferre liceat, quae uniuersaliter ad proportionem inter numerum candelarum quemcunque protendatur, ita ut manente illuminatione detegatur distantia numero

mero candelarum cuicunque respondens & vicissim dato hoc reperiatur illa?

§. 231. Quaestio haec ut solvatur, dicta sit distantia quaelibet $= x$, numerus candelarum respondens $= y$. Qualiscunque vero sit inter has quantitates relatio, constat eam generalissime exprimi posse per seriem huius formae ut sit

$$(A) y = \alpha + \beta x^m + \gamma x^n + \delta x^p + \text{§c.}$$

Etenim in eiusmodi seriem quantitates utcunque irrationales mutare licet.

§. 232. At vero iam definiendi sunt huius seriei coefficientes & exponentes. Quod ut fiat, vi experimenti (§. 230.) in hac serie pro distantia x substituatur $x/2$, atque patet loco ipsius y substituendum esse $2y$, ut sit

$$(B) 2y = \alpha + \beta x^m \cdot 2^{m:2} + \gamma x^n \cdot 2^{n:2} + \text{§c.}$$

erit ergo $2A = B$, quare faciendo $2A - B = 0$, prodit

$$0 = (2 - 1)\alpha + (2 - 2)\beta x^m + (2 - 2)\gamma x^n + \text{§c.}$$

At iam cum distantia x possit esse quaecunque, in hac serie erit variabilis, ut adeo omnes coefficientes ponendi sint $= 0$. Quare faciendo

$$(2 - 1)\alpha = 0 \quad \text{erit} \quad \alpha = 0$$

$$\beta(2 - 2) = 0 \quad \text{erit} \quad 2 = 2 \quad \text{adeoque} \quad m = 2.$$

$$\gamma(2 - 2) = 0 \quad \text{erit} \quad 2 = 2 \quad \text{adeoque} \quad n = 2.$$

Cum ergo eodem modo omnes exponentes euadant $= 2$, erit

$$y = \beta x^2 + \gamma x^2 + \delta x^2 + \text{§c.}$$

siue

sive

$$y = (\epsilon + \gamma + \delta + \epsilon^2 c) x^2$$

Erit ergo manente claritate illuminationis, numerus candelarum ut quadratum distantiae.

§. 233. Haec quidem positio directe experimentis firmatur. Manente enim candela in K, quaerenda erit distantia, in qua duae, tres, pluresue candellae eandem producant illuminationem (§. 58.) & distantiae istae erunt ut radix quadrata numeri candelarum. At indirecte eam hic eruere libuit, ob methodum, qua usi sumus, quam ipsam ob causam problemati paullisper adhuc immorabimur, quo
Fig. 25. distinctius euoluatur. Sit ergo in A paries vel charta vel planum quoduis illuminandum. In B, C, D, E, F &c. ponantur candellae 1, 2, 3, 4 &c. ita ut planum aequae illuminent. Ordinatae Bb, Cc, Dd &c. referant candelarum in quavis distantia numerum, atque ducta curva Abf quaerenda est aequatio eius indolem exprimens.

§. 234. Quaestionem hanc ad sequentem reduximus: *Inuenire curuam talem, ut ordinatae duplae respondeat abscissa, quae sit ad abscissam ordinatae simplae ut 1 ad $\sqrt{2}$.* Eiusmodi curuam parabolam esse neminem fugit, an vero sola sit, quae hac gaudeat proprietate, demonstrandum est. Hoc vero ipso constat problematis ante dati solutio. Dicta enim abscissa $= x$, ordinata $= y$, reperitur fore $y \propto xx$.

§. 235. Ast vero iam disquirendum est, an haec sit indoles curuae Abf, qua exprimitur ratio inter distantiam & numerum candelarum. Quem in finem ita experimenta sumi posuimus,

mus, ut collocato in distantia qualibet quolibet candelarum numero, quae planum in A collustrent, quaeratur distantia ea, in qua si ponantur candelae numero duplo plures, eandem producant illuminationem. Hoc experimento quoties libuerit iterato, mutata nempe distantia, mutatoque candelarum numero, sed seruata utriusque numeri ratione, detegetur distantiae prioris ad posteriorem ratio $= 1 : \sqrt{2}$. Quo modo lex ista adeo patet uniuersaliter, ut candelis in B, C, D &c. positae adplicari possit, ita ut si Bb ad Cc fuerit $= 1 : 2$, sit quoque $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$. similique modo $AC : AE = 1 : \sqrt{2}$. Quae adeo est conditio problematis (§. 234.) ad quod quaestionem propositam reduximus.

§. 236. Haftenus eam tantum explicauimus relationem, quae est inter distantiam candelarum earumque numerum, unde nil adhuc de claritate plani illuminati concludere licet. Hanc vero ut ingrediamur semitam, ponendum erit, claritatem cum a distantia tum a numero candelarum qualicunque modo pendere, ita ut positae ceteris circumstantiis omnibus iisdem, datae distantiae datoque candelarum numero, data vel definita respondeat illuminatio. Cum itaque pendeat a duabus variabilibus, dicta illuminatione $= \eta$, distantia respondens x , numero candelarum $= z$, efferri poterit per seriem, cuius singuli termini quadruplicis huius sint formae.

$$\eta = a + bz^m + \gamma x^n + \delta z^p x^q.$$

Quae ergo aequatio veluti functio est totius seriei.

§. 237. Ut iam definiantur exponentes & coefficientes, recordandum est (§. 229.) eandem esse illuminationem, quoties candelarum numerus fuerit ut quadratum distantiae. Quod si igitur pro z substituatur x , erit

$$\eta = \text{const.} = \alpha + \epsilon x^{2m} + \gamma x^n + \delta x^{2p+q}$$

Cum vero distantia x , servata hac lege possit esse quaecunque, aequatio ista constantem ipsius η valorem non praebebit, nisi fiat

$$2m = n = 2p + q = 0$$

hac enim ratione prodit

$$\eta = \alpha + \epsilon + \gamma + \delta$$

Haec vero constans pendet a claritate vel vi illuminante & magnitudine candelarum, siue quod eodem redit, ab illuminatione absoluta.

§. 238. Substitutis ergo valoribus repertis in aequatione

$$\eta = \alpha + \epsilon z^m + \gamma x^n + \delta z^p x^q$$

habetur

$$\eta = \alpha + \epsilon + \gamma + \delta z^p x^{-2p}$$

At iam cum $z = 0$, erit $\eta = 0$, quare

$$\alpha + \epsilon + \gamma = 0$$

Unde tandem fit

$$\eta = \delta z^p x^{-2p}$$

§. 239. Cum iam unicus hic, qui remansit terminus, sit functio infinitorum aliorum, ipsi similium, generalius ponendum erit

$$\eta = az^m x^{-2m} + bz^n x^{-2n} + cz^p x^{-2p} + \&c.$$

Hac ergo ratione seriem serierum, cuius functio erat aequatio §. 236, ad unicam seriem reducere licuit. Quae vero cum amplius re-

duci

reuocatur oculi iudicium, primaque firmantur &c. III

duci non possit nisi alia in subsidium vocentur experimenta, eam interim paullo propius considerabimus.

§. 240. Statim enim obuium est, legem unicam (§. 229.) qua usi sumus, ipsi plane reducendae non sufficere. Eo tamen reducta est, ut iam constet ratio inter exponentes, & singuli termini functiones sint ipsius z & x plane similes. Eadem ergo ratione directe pendet a numero candelarum, qua pendet reciproce a quadrato distantiae.

§. 241. Quodsi ergo assumi posset, illuminationem crescere simpliciter ut numerus candelarum, omnes exponentes euaderent $= 1$. adeoque foret

$$\eta = (a + b + c + \&c.) z : xx$$

§. 242. Si omnes exponentes m, n, p &c. poni possent aequales, foret

$$\eta = A. z^m : x^{2m}$$

Ut adeo illuminatio cresceret ut potestas quaedam numeri candelarum, decresceret vero ut quadratum huius potestatis ipsius distantiae.

§. 243. Quemadmodum ergo hinc patet nexus inter legem primam & secundam (§. 227. 228.) ita ulterius progrediemur, tertiam quoque, quae sinum anguli incidentiae spectat, in calculum inducendo. Ad tertium itaque & quartum experimentum supra descriptum (§. 62. 63.) regrediendo, ex utraque absque hypothesis adminiculo liquido fluit: eandem fore illuminationem, ubi sinus anguli incidentiae fuerit directe ut quadratum distantiae, reciproce vero ut numerus candelarum. Sit ergo sinus incidentiae $= s$,
pro

pro claritate plani illuminati hanc eamque universalissimam habebimus formulam

$$\eta = A + Bz^a + Cx^b + Ds^c + Ez^d x^e + Fz^f s^g + Gx^b s^i + Hz^{k+l+m} x^k s^m$$

quae functio est infinitarum serierum, quarum termini his sunt analogi. Definiendi iam veniunt huius formulae coefficientes & exponentes.

§. 244. Quod ut fiat, tenendum, claritatem fore constantem ubi fuerit

$$s = xx : z$$

siue

$$z = xx : s$$

Quo valore substituto, habetur

$$\eta. \text{Const} = A + Bx^{2a-a} s^{-a} + Cx^b + Ds^c Ex^{2d+e-d} s^{-d} + Fx^{2f+g-f} s^{-f} + Gx^{b+i} s^i + Hx^{2k+l+m-k} s^{-k}$$

At iam η constans esse debet siue x & s simul sint variables, siue alterutra sola. Posita ergo x variabili & s constante, singuli formulae termini constantes esse debent, quare erit

$$a = c = d = g = f = b = 2k + l = 0$$

Ponendo vero, manente x , fluere s , itidem erit

$$a = c = d = g = f = m = k = 0$$

unde ob

$$f = 0 \text{ \& } d = 0$$

erit

$$g = e = 0.$$

Quare his valoribus substitutis ob $k = m$, & $l = -2m$ erit

$$\eta = (A + B + C + D + E + F + G) + Hz^{m+m-2m} s^m x^{-2m}$$

At

reuocatur oculi iudicium, primaque firmantur &c. 113

At iam η euanescere debet cum fuerit vel z ,

vel s , vel denique $\frac{1}{xx} = 0$. Unde erit

$$\eta = H z^m s^m x^{-2m}$$

siue

$$\eta = H \left(\frac{zs}{xx} \right)^m$$

§. 245. Haec vero formula functio est seriei, cuius singuli termini sunt ut potestas quaelibet adhucdum indefinita, ipsius ($zs:xx$.) Ut adeo sit

$$\eta = a \left(\frac{zs}{xx} \right)^m + b \left(\frac{zs}{xx} \right)^n + c \left(\frac{zs}{xx} \right)^p + \&c.$$

§. 246. Ponamus iam terminos omnes primum sequentes fieri posse $= 0$, quod maximum esset compendium, erit

$$\eta = a \left(\frac{zs}{xx} \right)^m$$

Quodsi ergo claritas plani illuminati esset ut quadratum sinus incidentiae, patet fore $m = 2$, eadem itaque etiam esset ut quadratum numeri candelarum & reciproce in ratione quadruplicata distantiae. Accedit, quod in eadem hypothesis omnes termini seriei (§. 245.) erutae eundem habeant exponentem, sitque $m = n = p = \&c$. Etenim in functione (§. 244.)

$$\eta = H z^m s^m x^{2m}$$

H

pona.

ponatur $\eta = ss$, patet fore

$$1 = H.z^m s^{m-2} : x^{2m} = \text{const.}$$

Ut adeo pro singulis terminis exponens debeat esse $= 2$.

Fig. 1. §. 247. At vero iam, si unquam dubium de veritate legum Photometriae quid valuit, hic certe vel maxime fit evidens. Equidem in superioribus demonstrationem, qua euincunt Optices Scriptores omnes, *illuminationem decrescere ut sinus incidentiae* (§. 53.) ita dedimus, ut evidens fieret in planum A B non plures incidere radios, quam qui incidunt in planum A E, quod ad directionem radiorum est normale. At si dicendum quod res est, quodque pluribus ita videbitur, nimis propere hinc infertur, claritatem simpliciter ideo decrescere, quia pauciores radii obliquius in idem planum incidunt, quam qui normaliter incidunt. Quid quod si obliquitatis ictus, quo planum A B feriunt radii incidentes, ratio quoque esset habenda? Simile certe quid de vi radiorum solarium calefaciente autumant quam plurimi. Quidni ergo & de vi illuminante? Hoc vero si esset, concludendum foret, esse quoque

$$\eta = z^2 s^2 : x^4$$

adeoque praeter omnem opinionem augeri claritatem ut quadratum numeri candelarum, minui vero reciproce ut biquadratum distantiae. Quod utique minime est verosimile, quippe omnibus Mechanices principiis (§. 51.) contradicere videtur apertissime. Potius enim vi simplae addita dupla, tripla &c. destruitur eius

reuocatur oculi iudicium, primaque firmanitur &c. 115

eius quaedam pars, tantum abest ut in maiori adhuc ratione augeatur.

§. 248. Quodsi contra ea ponamus claritatem esse simpliciter reciproce ut distantia, tota series eruta abit in aequationem simplicissimam

$$\eta = \frac{\sqrt{zs}}{x}$$

Ut adeo illuminatio cresceret ut radix quadrata numeri candellarum & sinus anguli incidentiae. Intenderetur ergo radiorum oblique incidentium vis illuminans, ratione habita quantitatis minoris. Pauciores enim sunt ut sinus incidentiae s . Sed $(\sqrt{s}) : s > 1$.

§. 249. Quodsi vero statuatur esse $\eta \propto z$ siue $\eta \propto s$, siue denique $\eta \propto 1 : xx$, quacunque harum utaris hypothesium, substituto valore assumpto tota series (§. 245.)

$$\eta = a\left(\frac{zs}{xx}\right)^m + b\left(\frac{zs}{xx}\right)^n + c\left(\frac{zs}{xx}\right)^p + \&c.$$

ad unicum reducitur terminum

$$\eta = A \frac{zs}{xx}$$

Ut adeo hinc euidenter pateat, tres istas Photometriae leges (§. 227.) veras esse, simul ac una tantum earum vera sit. Ponamus v. gr. esse

$$\eta \propto s$$

quo valore substituto erit

$$s = a\left(\frac{zs}{xx}\right)^m + b\left(\frac{zs}{xx}\right)^n + c\left(\frac{zs}{xx}\right)^p + \&c.$$

H 2

adeo-

adeoque

$$1 = az^m s^{m-1} x^{-2m} + bz^n s^{n-1} x^{-2n} + \&c.$$

Positis iam z & x constantibus, s vero variabilem, patet nil ominus singulos seriei terminos debere esse constantes, adeoque ut hoc obtineat faciendum esse $m - 1 = 0$ siue $m = 1$. similiterque $n = 1$, $p = 1$, &c. Quare his valoribus substitutis prodit

$$\eta = a \frac{zs}{xx} + b \frac{zs}{xx} + c \frac{zs}{xx} + \&c.$$

siue simpliciter

$$\eta = \frac{Azs}{xx}$$

Idem eodem modo euincitur ponendo $\eta \propto z$ siue $\eta \propto 1 : xx$.

§. 250. Quicquid vero horum sit maxime probabile videtur, seriem erutam ad unicum reduci terminum, ut sit

$$\eta = A \left(\frac{zs}{xx} \right)^m$$

Quo vero assumpto patet fore

$$\frac{zs}{xx} = (\eta : A)^{1:m}$$

Ut adeo, etiamsi m non esset $= 1$, eodem tamen uti liceret calculo, quo in superioribus usi sumus. Quoties enim duae vel plures claritates fuerint aequales, eas aequales esse utique hac ratione detegetur. Quodsi vero inaequales essent, hoc tantum intercederet discrimen, ut loco ipsarum claritatum, quas inter se comparatas putares, substituendae essent earum potestates $1 : m$. Idem simili modo obtinere

tinere, si tota retinenda sit series, me non momento facile intelligitur.

§. 251. Utcunque vero exponentem m statuamus unitate maiorem vel minorem, semper quiddam aderit, quod vel communi experientiae aperte videtur contrarium. Cum enim claritas plani illuminati nil aliud sit, quam quantitas luminis in datam superficiem incidens, atque eodem modo claritas obiecti luminosi visa (§. 37.) aestimanda sit ex quantitate luminis, quod per pupillam in retinam oculi incidit, ibique obiecti imaginem depingit, consequens est, manente apertura pupillae eo clarius videri obiectum, quo densius fuerit lumen per spatium pupillae in datum quoduis imaginis punctum incidens. Aucta iam obiecti magnitudine vel superficie adparente, in eadem ratione augebitur quoque magnitudo vel area imaginis, ut adeo si lumen incidens in eadem quoque ratione augeatur, siue si sit $m = 1$, utique claritas imaginis eadem maneat. Obiectum ergo si aequale sit luminoso aequale clarum videbitur independentem ab eius magnitudine adparente. Contra ea si ponatur $m = 2$, erit $n \approx 33$. (§. 246.) adeoque duplicata obiecti magnitudine, quadruplicabitur luminis in oculum incidentis quantitas. Cum vero imaginis in retina spatium tantum duplicetur, consequens est in idem imaginis punctum lumen incidere debere duplo densius. Ut adeo claritas obiecti visa eo maior siue intensior esset, quo maior est eius magnitudo adparens. Quod utique videtur absolum, quippe obiectum, manente pupillae apertura

H 3

aeque

aeque videmus clarum, siue ipsius totam intueamur superficiem, siue partem superficiei visui subducamus. Eodem modo hoc patet, si ponas $m = 3, 4$ &c. & opposita erit ratio, si statuatur $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ &c. quippe his casibus, aucta obiecti aeque luminosi superficiei, minueretur eius claritas visa ut superficiei radix quadrata, cubica &c., ut posita superficiei duplo maiore claritas esset $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ &c.

§. 252. Sumantur iam tres candelae aeque clarae, atque in diuersa a plano illuminando distantia ita ponantur, ut illuminatio proximae debita aequalis videatur alteri, quae utrique debetur remotiori. Distantia proximae vocetur $= x$, secundae $= \xi$, tertiae $= y$, sitque illuminatio ipsis debita $\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}$. Erit ergo in formula generali (§. 244.) ob $z = s = 1$.

$$\eta = H: (xx)^m$$

$$\dot{\eta} = H: (\xi\xi)^m$$

$$\ddot{\eta} = H: (yy)^m$$

At iam experimentis dicto modo institutis detegitur fore $\dot{\eta} + \ddot{\eta} = \eta$, ubi fuerit

$$\frac{1}{yy} + \frac{1}{\xi\xi} = \frac{1}{xx}$$

quare hoc valore substituto prodit

$$\eta = \dot{\eta} + \ddot{\eta} = H \left[\frac{1}{yy} + \frac{1}{\xi\xi} \right]^m = H \left[\frac{1}{yy} \right]^m + H \left[\frac{1}{\xi\xi} \right]^m$$

adeoque

$$\left[\frac{1}{yy} + \frac{1}{\xi\xi} \right]^m = \left[\frac{1}{yy} \right]^m + \left[\frac{1}{\xi\xi} \right]^m$$

At

At cum in hac aequatione ξ & y variabiles sint, ista vera esse nequit, nisi fiat $m=1$. Quo facto, sequitur in genere fore (§. 249.)

$$\eta = 2s : xx.$$

§. 253. Ut vero nil intentatum relinquamus, nodum adhuc in scirpo quaeramus. Dubitare enim omnino licebit, an summa claritatis utriusque candelae remotioris, cum utraque actu in plano illuminato iungitur, sit eadem, quae est summa utriusque, si quaeuis seorsim spectetur, siue an fieri possit

$$\eta + \eta'' = \eta.$$

cum experimenta doceant, aequalem in utroque casu esse illuminationem? Quod si non admittas, nequaquam facere licebit

$$H \cdot x^{-2m} = H \left[\frac{1}{yy} \right]^m + H \left[\frac{1}{\xi\xi} \right]^m$$

sed ponendum

$$H : (xx)^m = H \left[\frac{1}{yy} + \frac{1}{\xi\xi} \right]^m$$

adeoque nec erit $\eta = \eta + \eta''$
sed

$$\frac{\eta}{H} = \left[(\eta : H)^{1:m} + (\eta'' : H)^{1:m} \right]^m$$

An vero eo usque a via simplicissima recedat natura, ulterius perquirere, mihi quidem post iam prolata, vel maxime videtur superuacaneum. Diutius vero quam par est me his immoratum fuisse, si quis iudicet, hoc mihi perinde erit, cum data opera factum sit. Methodum, qua usus sum, pro demonstrando nexu, qui inter leges Photometriae adest, haud pa-

rum contulisse iam initio monui (§. 226.) Huius enim methodi ope adeo arctum esse vidimus hunc nexum, ut qualibet istarum legum vel minimum alterata, ceterae quoque eadem ratione alterentur. (§. 247. 248.) Simulac enim ponas, crescere illuminationem ut quadratum sinus incidentiae, ponendum quoque erit, eam crescere ut quadratum numeri candelarum, decrescere vero reciproce ut biquadratum distantiae.

§. 254. A quarta lege, quae angulum emissionis spectat, animum abstraximus, cum a ceteris non pendeat, atque seorsim experimentis firmetur (§. 74. seqq.)

§. 255. Experimenta, quibus in praecedenti calculo usi sumus, ipsi interfereere nolimus, cum aptior eis hic sit locus, ubi iam examinandum venit oculi iudicium, tradendaeque sunt cautela, quibus occurrendum est oculi fallaciis. En ergo

EXEMPLA EXPERIMENTI II.

Fig 26 §. 256. In camera, cuius laquear & parietes infuscatis contabulatae erant asscribus ligneis, unica tantum ad fornacem relicta parte muri albissimi non obducti, quem referat recta ϵa , e regione huius muri collocaui candelam in L, interposito assere ligneo in C, totum murum obumbrante. Porro in B tria posui specula, ita ut lumen candelae in ϵ proiicerent, atque distantia $LB + B\epsilon$ pro singulis esset aequalis. Cumque anguli incidentiae a recto parum differrent, necessario tria spatia in ϵ a speculis collustrata, aequae illuminata esse debuis-

debuissent. At cum aliquantulam obserua-
rem claritatis differentiam, specula ista lumen
non aequaliter reflectere collegi. Remoto
ergo speculo, qui veluti medium tenebat, ce-
tera duo, obscurius nempe & clarius in B & b
ita posui, ut lumen candelae in idem spatium
in ϵ proiicerent, essetque $Lb + b\epsilon = LB + B\epsilon$.
Tertium speculum in A collocaui, tentamini-
bus quaerendo distantiam AL siue A α talem,
ut dum lumen candelae in α proiiceret, spa-
tium αa solo hoc speculo aeque collustraretur
ac spatium ϵa duobus speculis B, b. Quo facto
dimensus sum distantias A α , AL, B ϵ , BL, in
digitis & lineis pedis parisi. Experimentum
hoc quinquies iteraui, fuitque in

Experimento I° II° III° IV° V°

" " " " " " " "

$$LB = 35,8 -- 33,7 -- 69,5 -- 69,2 -- 28,7\frac{1}{2}$$

$$B\epsilon = 64,11 - 86,1\frac{1}{2} - 97,4 -- 101,6 - 48,1$$

$$LA = 21,1 -- 18,4 -- 48,4 -- 46,2 -- 17,0$$

$$A\alpha = 50,1\frac{1}{2} - 70,6\frac{1}{2} - 71,9 -- 73,5 -- 36,7\frac{1}{2}$$

§. 257. Ut iam his experimentis ostenda-
mus, numerum candelarum esse ut quadrata
distantiarum, tenendum est, candelarum vices
hic sustinere unius candelae L imagines, quae
pone specula erant in λ , l, adeoque distantias
esse

$$\lambda\epsilon = \epsilon B + BL.$$

$$l\alpha = \alpha A + AL.$$

Quare in experimentis nostris erat

$$\lambda\epsilon = 100,7 -- 119,8\frac{1}{2} -- 166,9 -- 170,8 -- 76,8\frac{1}{2}$$

$$l\alpha = 71,2\frac{1}{2} -- 88,6\frac{1}{2} -- 120,1 -- 119,7 -- 53,7\frac{1}{2}$$

EXPERIMENTVM V.

§. 260. Collocata iterum candela in L & Fig. 27. obiecto murum α obumbrante in C, speculum clarius posui in B, obscurius in b, & tertium, quod medium tenere dixi, in A, hoc modo, ut specula B, b lumen candela in idem spatium muri ξ proiicerent, utque claritas muri in α candela A debita aequalis videretur claritati in B quae ab utraque candela B, b proueniebat. Quo facto dimensus sum distantias speculorum a muro & candela. Experimentum quater instauravi, fuitque in

I^o II^o III^o IV^o

" " " " " " " "

AL=20,0--26,9--31,1 --44,10

A α =36,3--41,6--66,10--79, 2

bL=25,6--32,0--41,3 --62, 7

b ξ =47,3--54,1--85,2 --101,5

BL=32,6--45,6--60,6 --77, 2

B ξ =55,10--65,5--101,8--116,0

§. 261. At vero & hic sumenda erit distantia imaginum Λ, l, λ , quae ergo erat

" " " " " "

$\Lambda\alpha$ =56,3--68,3--97,11--124,0

l ξ =72,9--86,1--126,5--164,0

$\lambda\xi$ =88,4--110,11--162,2--193,2

§. 262. Cum in his experimentis inaequalis sit imaginum distantia, debebit esse

$$\frac{1}{(\Lambda\alpha)^2} = \frac{1}{(l\xi)^2} + \frac{1}{(\lambda\xi)^2}$$

Quam formulam eleganter construere licet. Distantia utriusque imaginis remotioris transferatur ex ξ in λ & l, ut rectae $\xi\lambda, \xi l$ sint normales. Fig. 28.

les. Duēta iam hypotenusā λl , in eam demittatur perpendicularis $\epsilon \Lambda$, haecque erit distantia imaginis proximae Λ . Etenim in omni triangulo perpendiculares sunt reciproce ut latera in quae demittuntur. At in triangulo rectangulo quadratum hypotenusae aequatur quadratis cathetorum iunctim sumtis, & catheti sibi invicem sunt perpendicularium loco. Dicta ergo area trianguli = 1, erit hypotenusā $\lambda l = 1 : \alpha \Lambda$, cathetus $\epsilon \lambda = 1 : \epsilon l$ & cathetus $\epsilon l = 1 : \epsilon \lambda$, adeoque

$$\frac{1}{(\alpha \Lambda)^2} = \frac{1}{(\epsilon l)^2} + \frac{1}{(\epsilon \lambda)^2}$$

Insuper dicta claritate candelae proximae debita = $l\lambda$. erit claritas debita remotiori = $\lambda \Lambda$, & ea quae debetur remotissimae = Λl . ut adeo sint in ratione segmentorum baseos ad totam basin trianguli rectanguli.

§. 263. At hic praestat calculus. Ut vero singula experimenta inuicem conferri possint, faciemus

$$1 = \left(\frac{\alpha \Lambda}{\epsilon l} \right)^2 + \left(\frac{\alpha \Lambda}{\epsilon \lambda} \right)^2$$

ut in singulis claritas in α per unitatem exprimatur. Calculo iam subducto, fuit in experimento

$$(\alpha \Lambda : \epsilon l)^2 = 0,5978 -- 0,6186 -- 0,5986 -- 0,5717$$

$$(\alpha \Lambda : \epsilon \lambda)^2 = 0,4055 -- 0,3786 -- 0,3646 -- 0,4119$$

$$\text{Summa} = \underline{1,0033 -- 1,0072 -- 0,9632 -- 0,9836.}$$

Ex quatuor his numeris medium sumendo erit

$$(\alpha A: \epsilon \lambda)^2 + (\alpha A: \epsilon l)^2 = 0,9898$$

$$\text{sed deberet esse} = 1,0000$$

$$\text{unde differentia.} = 0,0102$$

§. 264. Maxima differentia extat in tertio experimento, atque est $= 0,0368$. Respondet

vero distantiae $\Lambda \alpha = 97,11$, quae ergo 1,10 fuisset augenda, speculum A undecim lineis a muro vel candela remouendo. Quare & hinc iterum patet, minutas quoque ab oculo discerni claritatum differentias. Error enim vel differentia, quae in quatuor his experimentis maxima est, vigesimam septimam partem totius claritatis non excedit, in experimento quarto parte sexagesima minor est, in primo & secundo prorsus contemnenda.

EXPERIMENTVM VI.

§. 265. Recta BC referat murum album & maxime planum, cuius latitudo $= 2^1$, altitudo $= 10^1$. In L posita sit candela, cuius radii normaliter incidant in A, patet ex superioribus, partes muri superiores & inferiores minus fore illuminatas, in ratione directa sinus incidentiae & reciproca duplicata distantiae (§. 48. 53.) ut adeo illuminatio in B sit $= (\cos. BLA)^3: AL^2$. Perparum ergo claritas ab A versus B decrescit, ut nulla sensibilis sit eius differentia, ubi angulus BLA paucos gradus non excedit. Candela itaque in L collocata, positoque in D assere ligneo totam cameram pone

ne candelam obumbrante, 10 aut 12 pedd. a muro recessi, atque cum oculo nudo tum & lente concaua armato, murum intuens, quae-
 fui interuallum siue spatium BC, in quo nul-
 lam deprehendere valuit oculus claritatis dif-
 ferentiam, quae sensibilis esset. Quo facto
 metitus sum distantiam candelae LA, & alti-
 tudinem spatii CB, cuius dimidiam partem
 sumsi pro altitudine AB. Fuitque
 in Experimento

I°	AL = 10.	AB = 3,3
II°	= 20.	= 6,9
III°	= 30.	= 11,0
IV°	= 40.	= 15,9
V°	= 50.	= 21,6

§. 266. Etsi oculus inter claritates in B & A
 nullam inuenerit differentiam, nilominus uti-
 que sunt diuersae. Dicta enim claritate in
 $A = 1$, erit claritas in B $= (\cos. BLA)^3$, adeo-
 que utriusque differentia $= 1 - (\cos. BLA)^3$,
 quae oculi in hoc experimento subterfugit a-
 ciem. Est vero in

Exp.	0	1	3
I° ang. BLA	= 9,14	cos. BLA	= 0,9616 differ. = 0,0384.
II°	= 9,35		= 0,9587 = 0,0413.
III°	= 10,23		= 0,9517 = 0,0483.
IV°	= 11,8		= 0,9446 = 0,0554.
V°	= 12,8		= 0,9345 = 0,0655.

§. 267. Patet ergo hinc 1° differentias istas
 omnes exiguas esse, etsi forsan, ob difficulta-
 tem, cui obnoxia est utriusque claritatis com-
 paratio, cunctae maiores sint, quam in aliis
 experimentis. 2°. Differentias istas crescere,
 cre-

crescente distantia candelae, ut adeo non sint definita pars quota totius claritatis. Etenim in experimento primo differentia est $= 0,0384$ siue $\frac{1}{26}$ ipsius claritatis in A; At in quinto, cum candela esset quinquies remotior, fuit differentia $= 0,0655$ siue $\frac{1}{15}$ claritatis in A.

§. 268. Ut vero hos numeros ad eandem unitatem referamus, diuidendi sunt per quadrata distantiarum, quo facto erit pro

Distan- tia	claritas in A	claritas in B	differentia
----------------	------------------	------------------	-------------

10	----- 1,0000	--- 0,9616	-- 0,0384
20	----- 0,2500	--- 0,2397	-- 0,0103
30	--- 0,1111	--- 0,1057	-- 0,0054
40	--- 0,0625	--- 0,0590	-- 0,0035
50	--- 0,0400	--- 0,0374	-- 0,0026

Etsi ergo differentiae una cum claritatibus decrescant, non tamen id fit in eadem ratione. Claritates enim celerius decrescunt, quam differentiae. At probe notandum claritatem hanc esse veram. non visam. Visa enim cum ab apertura pupillae pendeat, in ultimis experimentis maior fuit, quam in primis, ob maiorem pupillae aperturam. Quae si in singulis experimentis statuatur differentiis, quas exhibuimus in §. 266, proportionalis, in eadem ratione augenda erit claritas in A & B, ut ea quae vera est, in visam commutetur. Ab hac enim pendet oculi iudicium. Quare fuit in

experi- mento	claritas visa in A	claritas visa in B	differentia.
I°	1,0000	0,9616	0,0384.
II°	0,2688	0,2578	0,0110.
III°	0,1398	0,1330	0,0068.
IV°	0,0902	0,0852	0,0050.
V°	0,0682	0,0638	0,0044.

§. 269. Differentiae hae sunt errorum, qui in oculi iudicium irrepere possunt, veluti limites extremi, quos aut nunquam aut rarissime excedet. Etenim in hoc experimento claritas ab A versus B & C adeo insensibiliter decrescit, ut difficillime determinetur, ubinam differentia euadat sensibilis. Unde in sumendis experimentis iam descriptis altitudinem AB debito potius maiorem quam minorem definitam esse, tuto assumere licebit.

§. 270. Ex ultima tabella (§. 268.) evidens est, claritatem celerius decrescere quam vero decrescit error, qui in diiudicanda claritate committi potest. Etsi ergo error in se spectatus maior sit, ubi claritas visa maior est, attamen si ad claritatem ipsam referatur, minorem eius constituet partem. Sic v. gr. error in primo experimento $= 0,0384$ vel novies maior est errore quinti experimenti; ille tamen tantum ad partem $\frac{1}{28}$, hic contra ad partem $\frac{1}{15}$ claritatis, ad quam spectat, ascendit. Neque dubitandum, errorem siue eius ad claritatem rationem notabiliorem euadere posse, ubi claritas minor fuerit ea, quae debetur distantiae candelae 50 digitorum. Immo concipere licebit claritatem adeo parvam, ut eam cum

ab,

absolutis tenebris confundat oculus, etsi, quod iam supra monuimus, & his paullatim asuescat.

§. 271. Cum itaque oculus claritates parte vigesima, vel decima vel magis adhuc inter se discrepantes, plurimis casibus confundat, eatenus incertum erit eius de aequalitate claritatum iudicium, quatenus claritates, quas aequales esse statuit, inter se diuersae esse possunt. Huic ergo dubio mederi conuenit, quantum quidem eius fieri potest. Quem in finem sequentia praenotasse iuuabit.

§. 272. Si experimenta sumantur eam tantum ob causam, ut lex quaedam vel ex principiis vel ex aliis experimentis deducta firmetur, qualia sunt ea, quae supra descripsimus (§. 58. 59. 62. 63. 256. 260.) his casibus ostendisse ut plurimum sufficiet, experimentorum a lege discrepantiam incertitudinem iudicii oculi non superare, adeoque eam intra limites contineri intra quos vagatur oculi sententia. Sic v. gr. in exemplis experimenti secundi (§. 259.) vidimus errorem maximum fuisse partem distantiae trigesimam, adeoque partem claritatis quindecimam, ut adeo, cum distantia minor fuerit $= 88'' 6\frac{1}{2}'''$, intra praefinitos limites (§. 270.) contineatur. In experimento Vto, error maximus erat $= 0,0368$ siue pars $\frac{1}{27}$ claritatis (§. 264.) cum ergo distantia candelae vel imaginis proximae esset $= 97'' 11'''$, errorem admittere adhuc licuisset parte $\frac{1}{15}$ claritatis maiorem (§. 270.) ut adeo cum error $= 0,0368$ sit fere duplo minor, duplo fere sit tolerabilior.

§. 273. Si idem experimentum, variatis circumstantiis, pluries iteretur, atque error pro ratione circum-

cumstantiarum vel maior euadat vel minor, aut de veritate legis eiusque uniuersalitate est dubitandum, aut suspicanda erit lex quaedam specialis, a circumstantiis istis pendens. Ita v. gr. in experimento VI. differentias crescere vidimus crescente candelae distantia (§. 266.) Eas ergo perperam confudisses.

§. 274. *Si iterato experimento aberrationes a lege, quam stabilire propositum est, indifferenter mox sint positiuae mox negatiuae atque contineantur intra praefinitos limites (§. 270.) de veritate legis eiusque uniuersalitate dubitare amplius baud licebit. Oculus enim claritates parum ab inuicem discrepantes aequales esse iudicat, siue prior, siue posterior maior fuerit. Huiusce modi deprehendes esse differentias inter numeros §. 258. §. 263.*

§. 275. *Quodsi denique aberrationes positiuas negatiuis deprebendas esse notabiliter maiores vel minores, aut statuendum erit, legem stabiliendam in minutiis a vero recedere, aut defectui instrumentorum anomalia ista erit tribuenda. Sic in experimentis (§. 256. seqq.) differentias distantiarum positiuas negatiuis inuenies esse maiores, quod claritatem speculis remotioribus debitam minorem reddit ac esse debuisset, idemque in experimento Vto (§. 260. 263.) deprehendes, ut adeo cum in singulis eadem adhibita fuerint specula, eodemque ordine collocata, hanc aberrationem diuersae speculorum vi reflectenti adscribere tuto liceat. Mederi quidem potuisset huic defectui, vel specula mutando, vel errorem definiendo, at in hisce minutiis diutius perscrutandis tempus terere non duxi opera pretium esse.*

§. 276.

§. 276. Maioris momenti est aberrationum istarum examen, ubi in dato quodam casu speciali determinanda venit obiecti cuiusdam claritas, aut vis reflectens, ut sunt albedo chartae, muri, gypsi &c. claritas singulorum obiectorum eidem lumini expositorum &c. Nimis enim hae quantitates sunt speciales & indiuiduae, quam ut legibus uniuersalibus subiici, iisque definiri possint. Unde non modo exactissima sumenda & seligenda sunt experimenta, verum & minuendus est error, cui obnoxium esse potest oculi iudicium.

§. 277. Cum aberrationes positivae & negativae aequae sint *possibiles* (§. 276.) consequens est, aequae quoque eas fore *frequentes*, si experimentum pluries iteretur. Quoties ergo utrinque eadem occurrent aberrationes, patet eas sese mutuo fore destructuras, ut adeo dudum iam inualuerit mos *ex cunctis terminis eum sumendi, qui arithmetice medius est*. Sumendus est *geometricus medius*, si inter rationes erroneas quaeratur ea, quae ad veritatem omnium maxime accedit. At si quantitates vel rationes erroneae parum ab inuicem differant, utrumque medium fere concidit.

§. 278. Quandoque ejusmodi medium sumitur inter duas quantitates quarum altera manifesto maior, altera minor est quaesita, neque constet quantum haec ab utraque extrema distet. Sic statuerunt peripheriam circuli proxime medium tenere inter poligonum circumscriptum & inscriptum plurimorum laterum. At longe exactius determinabitur, assumendo peripheriam a circum-

scripto duplo plus distare quam ab inscripto. Huiusmodi casus infra occurrent.

§. 279. Quodsi idem experimentum infinities ponatur repetitum, medium inter omnia a vero plane non differre statuere omni iure licet. Abstrahitur hic a defectu instrumentorum, alias enim non eam inuenies quantitatem, quae quaeritur, sed eam, quae defectui isti vel aliis circumstantiis simul debetur.

§. 280. Cum vero nullum experimentum infinities repetatur, dispiciendum erit, quid ex finito eorum numero deduci possit. Hoc certe casu haud quaquam statuere tuto licebit, aberrationes positivas & negativas aequales in experimento aequae fuisse frequentes. Hoc enim si esset, quantitas ex cunctis media vera quoque foret. Sit enim quantitas vera = Q , aberrationes sint $+a, +b, +c \&c.$ earum frequentia seu vices, $m, n, p, \&c.$ erit earum

$$\text{numerus} = 2m + 2p + 2q + \&c.$$

$$\text{summa} = (Q+a)m + (Q+b)n + (Q+c)p \&c. \\ + (Q-a)m + \&c.$$

adeoque

$$\text{media} = \frac{(Q+a+Q-a)m + (Q+b+Q-b)n + \&c.}{2m + 2n + \&c.} = Q$$

§. 281. At de hac conditione, quae exoptata esset, nunquam certus esse poteris. Eo tamen magis ad eam accedes, quo pluries repetatur experimentum. Cuius effati absolutissimam demonstrationem dedit cel. IAC. BERNOVLLI in *Arte coniectandi P. IV.* Per se enim patet totum hoc negotium ad *probabilitatem* reduci. Hanc ut diligentius rimemur, de errorum frequentia quaedam praemittenda sunt.

§. 282.

§. 282. Triplicis vero eos esse generis facile patet. Prioris sunt illi, qui debentur *vago oculi iudicio* (§. 269. 270.) quique adeo caueri nequeunt. Secundi generis sunt ii, qui debentur *observatoris incuriae*, qui etsi ipso *Argo* sit oculator, nunquam tamen aeque vigilare valet. Tertii denique generis ii sunt, qui ab *instrumentis aliisque circumstantiis* pendent, observatori non imputandi. Ab his animum abstrahimus (§. 275.) Aut enim iis mederi dabitur, aut seorsim determinandus erit defectus. Quorum alterutrum nisi fieri possit, frustra experimento quantitatem quae sitam exacte definire conaberis.

§. 283. Errores ab incuria pendentes inter definitos continentur terminos, quos excedere nequis, nisi data opera errare velis. Hoc vero cum fieret, simul ac data opera incurius esses, consequens est, ut eo rariores sint errores, quo sunt grauiore. Idem certe & in vita communi & in legibus de culpa plus minusue graui statuitur. Idem vero quoque valere de errore, qui pendet ab oculi iudicio, facile euincitur.

§. 284. Sint duae claritates, quas oculus aequales esse iudicet, patet inter utramque adesse posse differentiam, certis tamen limitibus circumscriptam (§. 270.) Ponamus iam differentiam hanc esse maximam, sitque claritas altera $= AB$, differentia maxima BC , consequens est claritatem alteram fore $= AB + BC = AC = DF$. Contra ea si haec sit minor, exprimetur per DE , quo casu prior erit $= AC$. Atiam cum incertum sit, quanta dif-

Fig. 30.

ferentia reuera adsit, patet puncta B, C esse limites prioris, E, F vero posterioris.

§. 285. Ponamus claritatem minorem esse $\equiv AB \equiv DE$, differentiam $\equiv FG$, ut maior sit $\equiv ED$. Quodsi vero iam utraque successue augeatur usque dum maior euadat $\equiv DF$. minor $\equiv AH$, amplius augeri non poterunt, quin simul alteretur sensatio, quippe claritas extra praefinitos limites euagaretur. At singula augmenta, quae capit a G ad F totidem sunt casus, qui manente oculi iudicio obtinere aequae facile possunt, Unde eo frequentior erit aberratio EG quo maior est eius ad aberrationem maximam EF complementum GF. Idem valet de aberrationibus negatiuis, quae occurrent, cum claritas A maior fuerit claritate B.

§. 286. Cum ergo aberrationes eo frequentius occurrant, quo minores sunt, consequens est, in dato quouis casu eas quantitates quae iterato experimento frequentiores sunt, quantitati mediae suae verae quoque esse propiores. Hoc certe si non admittas ab ea probabilitate, quae maxima est recedis, ipsique minorem substituis. Etsi enim possibiles quoque sint casus, qui a norma hac aberrant, attamen longe isti sunt rariores, ut pluries repetito experimento eorum possibilitas continuo minuatur sensimque euanescat.

§. 287. Sit iam experimentorum sumtorum numerus $\equiv N$, quantitas quaesita vera $\equiv Q$, aberrationes $a, b, c, d, \&c. \dots m, n$. quibus singulis praefigemus, signum $\pm$, cum in-

fini-

fnitis modis variari possit, sit denique quantitas ex cunctis media $\equiv M$, erit

$$M = Q + \frac{a+b+c+\dots+m+n}{N}$$

§. 288. Ponamus iam aberrationes istas ita esse comparatas, ut ultima n neglecta ceterae sese destruant, erit

$$M = Q + \frac{n}{N}$$

ut adeo decrescat aberratio media in ratione numeri experimentorum, adeoque ut ordinatae hyperbolae intra asymptotos. Eo ergo lentius decrescit, quo maior iam est numerus observationum. Hunc enim unitate augendo

erit aberratio $\equiv \frac{n}{N+1}$, quae a prima differt

parte $\frac{n}{N} - \frac{n}{N+1} = \frac{n}{N(N+1)}$. Ut

adeo pateat, unicum errorem magis notabilem quantitatem mediam diu turbare, nisi aucto experimentorum numero accedat alius aequae notabilis sed negatiuus, qui ergo priorem destruat.

§. 289. Casus hic aut similis saepius obvenit, maxime vero ubi experimentorum numerus haud fuerit ingens. Cum enim frequentiores sint aberrationes minores a, b, c, d &c. hae si forte fortuna solae adfuerint aut proxime sese destruent, aut saltem medium dabunt a vero parum discrepans. Raro accedit aberratio maior, rarius vero eiusmodi duae, quae sese destruant.

§. 290. Quicquid vero horum obueniat a-
ctu, pessimum assumendo patet (§. 288.) ab-
errationem $\frac{n}{N}$ siue quantitatem erutam $M =$

$Q + \frac{n}{N}$ longe minorem esse quantitate $Q + n$,
quam dat experimentum *Ntum*, si haec sola spe-
ctetur. Quare utique pluribus experimentis
collectis, sumtoque medio ad veram quanti-
tatem propius acceditur.

§. 291. Quodsi eiusmodi aberratio, quae
ceteras longe excedit, sola occurat datur hinc
methodus eam cognoscendi. Sumendae nem-
pe sunt differentiae inter mediam ex omnibus
deductam M & obseruatas $Q+a, Q+b, \&c. Q+n$.
Sit iam differentiae $Q+n - M$ ceteris notabili-
ter maior, dico quantitatem $Q+n$ a vera Q
omnium maxime distare, atque hac reiecta,
quantitatem ex ceteris mediam

$$M = \frac{Q+a+Q+b+\&c.....+Q+m}{N-1}$$

siue

$$M = Q + \frac{a+b+c+\&c.....+m}{N-1}$$

a quantitate vera Q minus differre, quam

$$M = Q + \frac{a+b+c+\&c.....+m+n}{N}$$

Cum enim singulae aberrationes $a, b, c, \dots, m$ sint
minores quam n , erit quoque

$$\frac{a+b+c+\&c.....+m}{N-1} < n$$

etiam si

reuocatur oculi iudicium, primaque firmantur &c. 137

etiam si omnes sumantur positivae. Dicta iam
summa

$$a + b + c + \dots + m = A$$

erit

$$\frac{A}{N-1} < n$$

adeoque

$$A < Nn - n$$

unde

$$0 < Nn - n - A$$

addatur utrinque AN , erit quoque

$$AN < AN + nN - n - A$$

adeoque

$$AN < (N-1) \cdot (A+n)$$

Unde

$$\frac{A}{N-1} < \frac{A+n}{N}$$

Minor ergo est aberratio media eo casu, quo
experimentum N um omittitur, unde ad quan-
tatem veram eo propius accedes, quo plu-
res aberrationum a, b, c, d , &c. sese destruent.

§. 292. Secus vero res se habebit, ubi dif-
ferentiae vel aberrationes a, b, c, d &c. omnes
sint positivae, sola aberratione n excepta quae
negativa sit, aut vicissim. At adeo parua est
huius casus probabilitas, ut ubicunque nota-
bilis sit experimentorum numerus, ceu *morta-*
liter impossibilis statui possit.

§ 293. Ut iam dicta exemplo illustremus, sequentes supra (§. 258.) ex quinque experimentis eruimus quantitates.

I ^o .	- - - -	$\alpha 1:6\lambda$	$= 0,70795$
II ^o .	- - - -		$= 0,73933$
III ^o .	- - - -		$= 0,72083$
IV ^o .	- - - -		$= 0,70068$
V ^o .	- - - -		$= 0,69908$

Ex his deduximus mediam $= 0,71357$

Quare differentia sumta, erat

I ^a	- - - -	$= - 0,00562$
II ^a	- - - -	$= + 0,02576$
III ^a	- - - -	$= + 0,00726$
III ^a	- - - -	$= - 0,01289$
V ^a	- - - -	$= - 0,01449$

Cum ergo differentia secunda ceteras omnes satis notabiliter excedat, reiecto experimento secundo, cuius quippe error non compensatur erit pro

I ^o .	- - - -	$\alpha 1:6\lambda$	$= 0,70795$
III ^o .	- - - -		$= 0,72083$
IV ^o .	- - - -		$= 0,70068$
V ^o .	- - - -		$= 0,69908$

Summa $= 2,82854$

Hinc media - - - $\alpha 1:6\lambda = 0,70713$

At deberet esse $= \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,70711$

differt adeo - - - $= 0,00002$

Etsi

Etsi vero haec differentia plane sit contemnenda, frustra tamen affectaretur triumphus, quippe fortuito id accidit. Potuisset enim differentia haec vel centies maior esse, semper tamen minor fuisset ea, quam retento experimento secundo, supra inuenimus. Ceterum cum nimis paruus sit experimentorum numerus, hoc exemplum potius adduximus, ut methodus ista quodammodo illustraretur, quam ut quantitas vera determinaretur (§. 272. 275. 256.)

§. 294. Quodsi ita comparatae sint aberrationes singulorum experimentorum, ut hac methodo tuto uti nequeas, nihilominus tamen alium in finem adhiberi poterit. Sumta enim ex cunctis quantitatibus media, utique dubium erit, an ista cum vera, quae quaerebatur, coincidat nec ne? Omittatur ergo experimentum, quod maxime aberrat a medio inuento, atque hoc facto iterum quaeratur medium. Hoc a priore subtracto, utriusque differentia proxime indicabit, quousque dubium est medium ex omnibus inuentum. Ita v. gr. ut eodem exemplo utamur distantia ex quinque experimentis media erat $= 0,71357$ (§. 258.) reiecto vero secundo (§. 293.) eandem inuenimus esse $= 0,70713$, quare utriusque differentia est $= 0,00644$, qua quantitate media eruta $0,71357$ vel maior vel minor esse potest. Proxime enim differentiam istam ceu limites aberrationis spectare licebit, ut maxime probabile sit, mediam quantitatem inuentam eos non excedere. Adeoque concludere inde licet distantiam mediam $0,71357$ parte

parte sua $\frac{0,00644}{0,71357} = \frac{I}{III}$ a vera haud discrepare, eatenus ergo eam esse exactam, quatenus partem $\frac{I}{III}$ vilipendere licebit.

§. 295. Cum in singulis Photometriae experimentis, ut & in infinitis aliis, aberrationes non aequae sint frequentes, alia datur methodus ex finito earum numero quantitatem mediam ita determinandi, ut maxime probabile sit, eam a vera omnium minime discrepare. Jam enim vidimus, rem omnem ad probabilitatem maximam esse perducendam, cum certitudinem omnibus numeris absolutam assequi non detur. Expedit ergo methodum istam uniuersaliter exponere.

Fig. 31. §. 296. Sit quantitas vera experimentis determinanda AC , aberrationes utrinque maximae sint CB , CD . Ceterarum aberrationum CQ , CP , CR , CS frequentiam seu vices referant ordinatae QM , PN , RL , SK curvae $BMLD$, quas vocabimus *vices absolutas* seu *veras*, ut ab *obseruatis* distinguantur. Patet vero has cum illis coincidere debere, experimento infinities iterato. At cum hoc numquam fiat, dispiciendum quid pro finito experimentorum numero sancendum sit.

§. 297. Primo quidem facile perspicitur, si *vices cuiusque aberrationis obseruatae veris* PN , QM , RL , SK &c. sint proportionales utique inde innotescere quantitatem veram AC . Curua enim super axin ACD cis citra erit remouenda, usque dum vices obseruatae per veras diuisae
eos-

reuocatur oculi iudicium, primaque firmantur &c. 141

eosdem exhibeant quotientes. Hoc vero cum rarissime accidat, hoc medio uti non licet.

§. 298. Porro non minus obuium est, *ob* *datas punctorum* P, Q, R, S *ab inuicem distantias,* *vel unius eorum* Q *a puncto* C *data distantia* CQ , *siue* *aberratione vera,* *dari quoque ceterorum aberrationes* *veras* CP, CR, CS . Ut adeo ad unicam quae-
sitam reducatur problema propositum.

§. 299. Ponamus iam quantitates $AP, AQ,$ AR, AS obseruatas fuisse n, m, l, k vices, quaeruntur casus omnes possibiles, quibus hoc fieri potuit. Quod ut inueniatur ex theoria combinationum & permutationum sequentes mutuabimus positiones.

I°. Si numerus obseruationum factarum sit N , atque quaeuis earum semel tantum occurrat, numerus casuum possibilium erit idem ac numerus permutationum, adeoque $= 1. 2. 3. 4. 5. \dots N$.

II°. Si obseruatio quaedam pluries, v. gr. p vices occurrat, perinde erit, quatenam sit prior, quatenam posterior, adeoque numerus casuum possibilium minuetur, eritque

$$= \frac{1. 2. 3. 4. 5. \dots N}{1. 2. 3. 4. 5. \dots p}$$

Utraque haec positio obtinet, ubi omnes obseruationes aequae sunt possibiles.

III°. Si una vel plures obseruationes ceteris magis sunt possibiles, quaeuis tamen semel tantum occurrat, multiplicandus erit numerus casuum $1. 2. 3. \dots N$ per exponentes possibilitatum, siue per vices veras.

IV°. Si denique diuersa sit possibilitas, atque obseruationum quaedam pluries occurrant, numerus per positionem secundam inuentus multiplicandus est
per

per vices veras ad eas potestates euectas, quae vicibus obseruatis respondent.

§. 300. Haec iam facile ad quaestionem propositam adplicantur. Est enim numerus obseruationum $= m+n+k+l$.

vices obseruatae sunt n, m, l, k .

Vices verae autem sunt PN, QM, RL, SK dicto ergo numero casuum possibilem $= N$, erit

$$N = \frac{[1.2.3.4\dots(n+m+l+k)]PN^n.QM^m.RL^l.SK^k}{(1.2.3\dots n).(1.2.3\dots m).(1.2.3\dots l).(1.2.3\dots k)}$$

Manente vicium obseruatarum n, m, l, k , numero, constans erit coefferiens, qui ex permutationibus prouenit, unde erit

$$N \propto PN^n.QM^m.RL^l.SK^k.$$

Adeoque numerus casuum possibilem erit factum ex vicibus veris ad potentias eas euectis, quae vicibus obseruatis sunt aequales.

§. 301. Quodsi iam daretur aberratio vera CQ, darentur quoque CP, CR, CS, adeoque & vices verae PN, QM, RL, SK, quippe curua BMD hic ceu data supponitur. Unde simul daretur numerus casuum possibilem. At cum probabilitate hic contenti esse iubeamur, aliam oportet ingredi viam.

§. 302. Aberratio CQ statuatur variabilis, eaque aucta vel imminuta, aberrationes CP, CR, CS quoque augebuntur & minuentur, cum constans sit punctorum P, Q, R, S ab invicem distantia. Quare mutabuntur quoque ordinatae seu vices verae PN, QM, RL, SK, adeoque & numerus casuum possibilem N.

§. 303.

§. 303. Cum vero iam in genere iste casus maxime sit probabilis, qui omnium frequentissime occurrit, consequens est, debere esse

$PN^n \cdot QM^m \cdot RL^l \cdot RK^k = \text{numero maximo.}$
Etenim haec quantitas est in ratione numeri casuum possibilium, adeoque eo facilius & frequentius occurreret, quo magis hic numerus numeros ceterorum casuum excedit. Hanc vero ipsam ob causam, cum maxima quaeratur possibilitas, omnium iste numerus maximus esse debet.

§. 304. Erit ergo &
 $n \cdot \log PN + m \log QM + l \log RL + k \log SK = \text{max.}$
quare differentiando

$$0 = \frac{n \cdot d(PN)}{PN} + \frac{m \cdot d(QM)}{QM} + \frac{l \cdot d(RL)}{RL} + \frac{k \cdot d(SK)}{SK}$$

Ad puncta H, M, L, K ductae concipiantur tangentes, sintque subtangentes $\gamma, \mu, \lambda, \kappa$, probabilitas erit maxima ubi fuerit

$$\frac{n}{\gamma} + \frac{m}{\mu} + \frac{l}{\lambda} + \frac{k}{\kappa} = 0$$

in qua formula subtangentes sunt positivae aut negativae prout aberrationes, quibus respondent, positivae vel negativae fuerint.

§. 305. Si curua BMLD ex utraque parte centri C fuerit similis, quantitas media AC hac ratione inuenta saepius cum quantitate arithmetice media, de qua in antecedentibus nobis sermo fuit, coincidit. Sic v. gr. si duae tantum sumtae fuerint observationes AQ, AR, erit $m = l = 1$, adeoque

$$0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

unde

unde

$$\lambda = \mu$$

quod esse nequit nisi punctum C a punctis Q, R aequè distet, at eo ipso euadit

$$AC = \frac{AQ + AR}{2}$$

ut adeo AC sit arithmetice media inter AQ & AR.

§. 306. Similiter hoc patet, ubi quatuor sumpta fuerint experimenta, atque distantiae PQ & RS fuerint aequales. Etenim hoc casu punctum C a punctis Q, R vel P, S aequè distabit. Idem obtinet ubi tria sumpta fuerint experimenta, quorum extrema a medio aequè differunt. Medium enim cum centro C coincidet. Ceterum vel per se patet hanc methodum elegantem potius quam commodam esse, cum ad prolixiores ducat calculos. Hinc ipsi fusius perscrutando non immorabimur, praesertim cum quantitas media hac ratione inventa, ab eâ, quae arithmetice media est, ut plurimum fere non differat.

§. 307. Maximae experimentorum aberrationes utique observatoris incuriae debentur, iuvabit ergo eas hic in medium proferre cautelas, quibus uti convenit, ut quantum in viribus situm est, evitare eas liceat. Quod vero inter primaria impedimenta referri debet, quodque omnibus sensationibus commune esse merito videtur, est *affectuum in sensus imperium*. His certe turbatus plus saepe invenis quam adest, siue ut rectius loquar, plus adesse, quam adest te reperire credis. Huic
iam

iam vitio ut obuiam ire liceat, cauendum est, ut nulla capiatur rectorum vel angulorum mensura, quin prius tentando utramque claritatem comparandam aequalem esse aut oculo videri deprehenderis. Caue porro rectoras istas aut angulos ex post mutes, cum forte eos opinioni, quam foues baud satis respondere inuenies. Is ergo seruandus est ordo, quem in experimentis supra traditis veluti exemplis docuimus.

§. 308. Facilior erit comparatio, ubi utraque claritas aequae est albida, aequae flauescens, aequae liuida &c. *At vero his casibus vel maxime dubitandum, reuera aequalem esse utramque claritatem, quoties comparatio tibi facessit negotium ut diu utramque intueri veluti cogaris, antequam de aequalitate quicquam statuere te posse deprehendas.* Quod si enim reuera aequalis fuerit utraque claritas, aequalitas ista adeo manifesto in oculos incurrit, ipsisque ita se probat, ut dubium supersit plane nullum. Sic in experimentis supra descriptis (§. 256. 260.) spatia a speculis illuminata ita aequae clara videri debent, quasi idem lumen per duo foramina murum collustraret. Quoties vero dubius haereas, oculusque iudicium ferre primo iteratoque intuitu recuset, fallaciam subesse tuto concludes, & speculorum distantiam mutare e re erit tua.

§. 309. Aegre comparantur claritates, quae colore plus minusue differunt. Sic albedo chartae, quam luna collustrat, lacteo gaudet colore, lumini candelae exposita flauescit. Huic incommodo quandoque mederi licet, si chartae albae substituatur alia eo colore illita, qui disparitatem istam tollat. *Saepius quoque*

alterutra claritas data opera est augenda vel minuenda, ut apertissime eam altera esse maiorem vel minorem videas. Hoc enim modo simul dignosces, quam in re consistat differentia a diuerso claritatis utriusque colore pendens. Hanc postea ita minuire paulatim licebit, ut ad sensum plane euanescat. Exempli, quae huc faciunt, infra occurrent.

§. 310. Cum porro oculus claritatibus diuersissimis successiue assuefiat, ab uno extremo ad alterum veluti per saltum transire haud licet, atque expectandum erit, usque dum apertura pupillae ea sit, quae claritati propositae conuenit, atque fibrillarum motus tremulus, qui paulatim cuilibet claritati sese accommodat, in *statum permanentiae* peruenerit. Potius vero densissimas oculus sufferre valet tenebras, quam nimium splendorem, qualis est splendor solis, ut adeo ceteris paribus minus turbetur oculi iudicium, ubi claritas splendore isto est inferior.

§. 311. Antequam instituat experimentum, probe eius ponderandae sunt *conditiones*. Quare arcendum omne lumen alienum, quantum in *potestate est*, & si arceri omne nequeat, danda est opera, ut utraque claritas comparanda aequae ab eo augeatur. Hoc enim salua manet aequalitas. Si plures adhibendae sint candelae, merito istarum aequalem claritatem suspectam iudices, cum nimis sit variabilis. Hinc in experimentis supra prolatis speculis uti maluimus, quam pluribus candelis. Quantumuis enim variabilis sit candelae adhibitae claritas, omnes eius imagines eodem modo clariores & obscuriores euaserunt, & salua fuit inter vires illuminantes *ratio*, quae
in

in istis experimentis utramque facit paginam. Diuersam quoque speculorum vim reflectentem ante experimentum institutum explorare seorsim oportuit, ut & haec impleretur conditio (§. 256. 275.) Eandem ob causam longetutius immutabis unius candelae distantiam vel angulum incidentiae, quam numerum candelarum.

§. 312. Si, quod plura requirunt experimenta infra adferenda, eiusdem candelae vis illuminans a parte antica & postica comparanda est, eo felicius succedit experimentum, quo propius candelae flamma ad figuram conicam accedit. Ad hanc ergo conditionem vel maxime erit attendendum, si grauem incuriam vitare volueris.

§. 313. Specula denique vel vitra, quae adhibentur, omni cura abstergenda esse, per se euident est, cum vel minimi puluisculi lumen intercipient, eiusque adeo densitatem, quam integram seruare oportebat, debito reddant minorem.

§. 314. Plures insuper dantur cautela, quas vero commodius experimentis ipsis interferemus, ut simul veluti exemplo illustrentur.



PHOTOMETRIAE

PARS II

QVA EXPERIMENTIS ET CALCULO

SVBICIVNTVR

LUMINIS MODIFICATIONES

A CORPORIBVS PELLUCIDIS,

POTISSIMUM A VITRO PENDENTES.

CAPVT I.

Experimentis definitur quantitas luminis a planis vitreis perfecte pellucidis reflexi & refracti. Utraque perlu-
stratur calculo.

§. 315.

Ad difficiliore subtilioresque accedimus luminis modificationes, quae omnem luminis theoriam eamque vel maxime excultam ita eluserunt, ut ne quidem experimentis adhucdum satis sint definitae. Horum quaedam sumsit Cel. BOVGVER, eaque descripsit in libro ob nouitatem materiae laudatissimo *Traité sur la Gradation de la Lumiere*, cuius alteram editionem superiori anno, ne inter posthuma referretur, agonizans ad finem, quem exoptabat, perduxit. Posteriores hanc editionem, quam priorem post se longo intervallo relinquere absolutissimamque esse perhibent,

bent, nondum vidi. Quod vel ideo hic monendum duco, ut si quapiam in re humani quid passum esse acutissimum Virum, liberius dicam, primam me spectare editionem, intelligant Lectores aequi rerum arbitri.

§. 316. Theoriam in his experimentis nobis deesse, summus iam perspexit NEWTONUS, & qui eius Opticen exscripserunt Auctores omnes. A primis ergo nobis hic originibus repetenda res est, singulaeque, quibus in ea rimanda opus erit, positiones, experimentis firmandae, ut tandem per longissimam eorum *seriem* in apricum perducatur.

§. 317. Ea corpora *pellucida* vocari, quae lumen transmittunt, in vulgus notum est, communi quippe nititur loquendi more. Altioris indaginis est definitio corporum *perfecte pellucidorum*. Ea vero plerumque hoc insignienda esse nomine putant, quae lumen omne transmittunt, nullum reflectunt, nullumque intercipiunt, dispergunt, absorbent. An vero praeter spatium absolute vacuum, ecquisnam huic corporis nomen tribuet? vere detur eiusmodi corpus, quaestio est, quam ratiocinio tantum dirimere licet, cum ob absolutissimam eam pellucidatem omnem oculi aciem necessario effugiat. Quodsi quis aetherem huc referre velit, quatenus cum vehiculum lucis esse statuit, a logomachia sibi caueat, cum utique huiusmodi vehiculum a corpore pellucido videatur distinguendum.

§. 318. Ut vero absque longorum ratiociniorum ambagibus quicquam hic statuatur, quod ab omnibus concessum iri confido, primo

corpora pellucida sumemus, qualia ipsa natura nobis subministrat, atque dispiciemus, quam ob causam non omne lumen transmittant. Quo facto experimentis litem istam dirimere dabitur.

§. 319. Concedendum enim erit, *lumen in corpora quaecunque, horumque quaslibet particulas incidens ab iis reflecti saltem ex parte, quoties particulae istae absque lumine invisibiles, lumine admoto visibiles sunt.* Porro aerem, aquam, vitrum cet. corpora esse pellucida nemo sanus est, qui negabit. Quae cum ita sint, en quod in vulgus notum est,

EXPERIMENTVM VII.

§. 320. Per exiguum foramen F in camera obscuram incidant radii solares FE, qui excipiantur interposita superficie aquae, vitri, vel alius cuiuscunque corporis pellucidi AB. Quo facto

- 1°. Quacunque te vergas in toto spatio EFe, per quod transit radius, infinitos volitare videbis puluisculos, veluti puncta tenui lumine radiantia.
- 2°. Similes videbis in spatio EGge, per quod lumen a superficie AB reflecti colligitur.
- 3°. Porro totum spatium EehH in corpore pellucido, partemque superficiiei Ee quacunque ex parte intuearis, proprio veluti lumine radiare observabis.
- 4°. Si DC fuerit superficies vitri interior, similem in Hh observabis luminis partitionem ac in Ee.

5°. Sin-

5°. Singula haec phaenomena, obturato foramine Ff euanescent. Ceterum politas esse debere superficies AB, DC vel me non monente intelligitur.

§. 321. Quatenus in hoc experimento lumen recta pergit per EG, EH, ut charta interceptum eam illuminet, priori casu *reflecti* posteriori *refringi* dicitur. Refractum quatenus per corpus AC recta transit, eatenus corpus istud *pellucidum* est. Perfec̃te pellucidum foret, si omne lumen transmitteret. At duplex adest eius imminutio.

§. 322. Primo enim pars quaedam regreditur per EG. quod simpliciter *lumen reflexum* vocabimus. Porro cum totum spatium EHhe visibile sit, quacunque te vergas, consequens est, lumen in transitu suo per corpus diaphanum ab eius particulis quaquaversum reflecti (§. 319.) Quod ergo cum dispergatur, *lumen dispersum* vocabimus, patetque, & ab iis particulis, quae in superficie Ee sunt, lumen dispergi, idemque in aere obtinere experimentum hoc docet, etsi experientia quotidiana non constaret, qua conuincimur, obiecta remotiora debiliore lumine gaudere, eandemque ob causam totam atmosphaeram caeruleo colore visibilem esse.

§. 323. Haec luminis dispersio a variis pendet causis. Huc referendos esse puluisculos aeri innatantes, vitrique superficiei copiose adhaerentes, abunde est evidens. Omnium porro corporum superficies plus minusue pulvere conspersas esse, ita constat, ut satis abstergi nequeant & politissimae, quin minutis-

simi puluisculi vel remaneant, vel ex aere contiguo iterum attrahantur. Porro in vitro maximam semper esse minutissimarum bullularum copiam, oculus & nudus & armatus videt.

§. 324. At iam vel per se patet, omnia haec luminis decrementa in corpore perfecte pellucido abesse debere. Absint ergo licet bullulae istae, absint quoque puluisculi, quaeritur, an ipsae corporis pellucidi particulae vel maxime homogeneae, omni vi dispergente absolute sint priuae? Hoc quidem ego dubium non soluam. Experientia certe eiusmodi corpus perfecte homogeneum nusquam nobis ponit ob oculos. Interim tamen istud hoc saltem respectu *perfecte pellucidum* vocare haud ambigo. Ab hoc enim infimo impelluciditatis gradu ceteros computandos esse duco, eodem modo quo gradus caloris ab absoluto frigore computandi sunt, etsi uterque casus in rerum natura vix existat.

§. 325. Quodsi ergo ceu possibile admitatur corpus hoc sensu perfecte pellucidum, nondum tamen ideo absolute pellucidum erit, nisi simul omne absit lumen reflexum, (§. 322.) ita ut quantum luminis in eius superficiem incidat, totum istud libere transeat, ut ne minima quidem eius pars vel reflexione vel dispersione diuellatur a toto. Hoc demum cum fuerit, aderit pelluciditas omnibus numeris absoluta.

§. 326. Actu non dari corpora pellucida, quae nullum lumen *dispergant*, post ea quae iam diximus, vel maxime probabile est, tutoque affirmatur, donec euidentissime euincatur
contra-

contrarium. Eorum tamen possibilitatem tantum non plane negamus, eamque ob mensuram impelluciditatis admittimus. Secus est, si corpora desiderentur diaphana, quae nulum lumen *reflektant*, cum in eorum superficiem incidit. Experimentis enim mox proferendis patebit, ea non modo non existere, sed in praesenti rerum statu nequidem ea existere posse. Circa ista sequentia notasse iuuabit.

§. 327. Quantitas luminis reflexi utique, pendet a densitate corporis diaphani, simulque a densitate medii ex quo in corpus diaphanum incidit. Sic v. gr. experimentis facile probatur lumen ex aqua in vitrum incidens minus reflecti, ac cum in vitrum incidit ex aere. Contra ea, quod omnibus hactenus visum est paradoxon inexplicabile, longe magis reflectitur lumen e medio densiore in rarius, e vitro v. gr. in aerem incidens, quam cum incidit ex aere in vitrum. Hoc certe phaenomenon a solo impelluciditatis gradu vix pendet. Distinguenda enim esset impelluciditas quae in superficie vitri est ab ea quae intra vitrum adest, ita ut illa sola a medio contiguo penderet, cum haec integra maneat, atque a medio vitrum ambiente non turbetur. Sermo vero nobis hic est de ea impelluciditate, quae debetur particulis lumen dispergentibus, quaeque adeo pendet ab heterogenea earum natura. Haec sane invariata manet, siue aqua siue aer vitrum ambeat. At maxima est luminis reflexi differentia. Verosimile ergo utique videtur, lumen

K 5

istud

istud reflexum potius unice deberi viribus, quibus lumen a via sua deflectitur, dum ex uno medio in aliud incidit quod priore est densius vel rarius, siue cuius vis refringens est diuersa. Hanc enim differentiam ita sequitur quantitas luminis reflexi, ut cum ea simul crescat atque minuatur. Quod si vero iam concedatur lumen reflexum deberi viribus refringentibus vel aliis cum iis necessario connexis, concedendum esse quoque videtur, has vires easdem manere, siue magis siue minus a particulis vitri dispergatur. Quid ad rem faciat experimentum sequens lectores dispiciant.

EXPERIMENTVM VIII.

§. 328. Sumsi duo vasa figulina nigro intus encausto parumque polito obducta, iisque sub diu iuxta se positis, alterum impleui aqua limpidissima alterum atramento nigerri-
mo. Quo facto in utroque fluido coeli sudi imaginem intuens, utramque aeque claram videri ad sensum deprehendi. Idem experimentum noctu institui, imaginem muri albi in utroque fluido intuens, cum a lumine candelae remotioris collustrabatur. Utraque imago aeque videbatur clara. Dedi vero operam, ut anguli incidentiae & reflexionis in utraque superficie fluidi essent aequales.

§. 329. Ni fallor in hoc experimento vis reflectens fluidi opacissimi & limpidissimi inter se comparatur. Utraque deprehenditur aequalis. Equidem non inficior, aequalitatem, istam absolutissimam esse nequaquam
po-

potuisse, quippe vitriolum, quod atramentum, quo usus sum ingreditur, utique eius vim refringentem auxit, unde mea quidem sententia, aucta quoque esse debuit vis reflectens. At differentiam istam utpote perexiguam oculis discernere non valui (§. 271.) Ceterum sumendum fuisse vas nigro intus pigmento illitum, facile patet. Sumto enim vase albo, evidens est, albedinem istam, cum per aquam sit visibilis, cum claritate imaginis misceri, hancque adeo euadere debito clariorem.

§. 330. Legitima iam mihi videtur consequentia hinc deducenda, *eadem valere de gradibus opacitatis quibuscunque, quae de utroque extremo valent, eandemque fore vim aquae reflectentem, quantacunque vel quantulacunque sit eius opacitas.* Datur ergo licet aqua nullum plane lumen dispergens, non tamen dabitur, quae nullum reflectat. Etenim vis reflectens ab opacitate non pendet. Opacum vero omnino dicitur corpus, quod omne lumen intus dispergit, ut recta istud permeare nequeat.

§. 331. Notare insuper conuenit, quantitatem luminis reflexi, quatenus lumini disperso opponitur, maiorem esse, ubi magis est polita corporis diaphani superficies. Quod si enim minus fuerit polita siue admodum aspera, & illud quoque lumen, quod in eadem directione EG reflecteretur, quaquaversum dispergitur. Haec uero dispersio ab ea, quae fit a particulis heterogeneis, opacioribus puluisculis, bullulis &c. probe est distinguenda.

EX.

EXPERIMENTVM IX.

Fig. 33.

§. 332. In plano albo ABCD atramento duxi lineam ILK cuius latitudo $\approx 1''$ pedis parisini, quaeque ad sensum ubique aequali nigredine gaudebat. Plano isti normaliter imposui tabulam vitream EFGH, ita ut eius basis EH cum recta IK in L angulum efficeret ILE recto aliquot gradibus minorem, planumque AC ab utraque parte tabulae vel a candelae lumine, vel a sole, vel a lumine coeli aequè collustraretur, neque a tabula obumbraretur. Sic obtinui, ut cum oculus esset in O, partem rectae posticam IL refractam videret in LQ anticam vero LK reflexam in LP. At neutra earum iam videbatur nigra, sed plus minusue cinerea, prout mutabatur situs oculi. Etenim cum imagine partis rectae posticae IL miscebatur imago plani albi LN reflexa, contra ea cum imagine partis anticae LK confusa erat imago partis plani LM per refractionem visa. Eum iam quaevisi tentando oculi situm, quo utriusque partis imago aequè videretur cinerea, quem invenire perfacile erat, cum crescente claritate altera, altera decresceret. Oculus vero, noctuque candela ita remouebantur, ut radii a parallelis parum differrent. Hoc ergo situ reperto metitus sum angulos incidentiae radiorum IQ, MP, NQ, KP, eosque inueni esse $\approx 14\frac{1}{2}$ gr. Eisdem quoque inueni Experimenti circumstantias ita immutando, ut tabulam sumerem plus minusue diaphanam, chartam ABCD plus minusue albam, rectam denique IK pigmento rubro, flauo caeruleo ductam &c.

§. 333.

§. 333. Cum in his experimentis anguli incidentiae utrinque sint aequales, consequens est eos in diuersitatem refractionis & reflectionis influere non posse. Unde si qua est eiusmodi diuersitas, ista simpliciter pendet a claritate chartae atque coloris rectae IK. Nullum vero est dubium, quin lumen reflexum & refractum ita ab utraque ista claritate pendeat, ut una cum ea augeatur & minuat. Aequales porro sunt anguli emanationis, & punctorum I, M, N, K. a punctis Q, P adeoque & imaginum ab oculo distantiae. Ut adeo lumen in Q, P utrinque incidens constanter sit in ratione claritatis rectae IK & tabulae vel plani ABCD.

§. 334. Sit ergo claritas rectae IK vel lumen ab ea in P, Q incidens $= \alpha$ hoc lumen ita in Q, P diuidatur ut per vitrum transeat pars $= v\alpha$, reflectatur pars $= \mu\alpha$, amittatur residuum $= \alpha(1 - v - \mu)$. Similiter sit lumen a plano MN in Q, P incidens $= \epsilon$. iterum transibit $v\epsilon$, reflectetur $\mu\epsilon$, dispergetur $\epsilon(1 - v - \mu)$ siue si concedere hoc nolis, ponamus refractum $= N\epsilon$, reflexum $= M\epsilon$, amissum $= \epsilon(1 - N - M)$. Erit ergo claritas imaginis per rectam OQ visae

$$= v\alpha + M\epsilon$$

claritas eius, quae per rectam QP videtur

$$= \mu\alpha + N\epsilon.$$

At iam vi experimenti utraque imago est aequae clara, adeoque erit

$$v\alpha + M\epsilon = \mu\alpha + N\epsilon.$$

unde habetur

$$(v - \mu)\alpha = (N - M)\epsilon.$$

At

At enim eadem obtinet aequalitas, idemque angulus, utcumque mutetur quaelibet claritatum α, β . Necessario ergo faciendum est $v = \mu$ & $N = M$. Ut adeo quantitas luminis sub angulo $14\frac{1}{2}$ gr. in planum vitreum incidentis, reflexa & refracta sit aequalis, qualiscunque sit incidentis intensitas.

§. 335. Quodsi ergo nullum lumen dispergatur erit $v + \mu = N + M = 1$, adeoque $v = \mu = N = M = \frac{1}{2}$. Quare in casu perfectae pelluciditatis (§. 324.) lumen sub angulo $14\frac{1}{2}^\circ$ in planum vitreum incidens, ita dispartitur, ut dimidia eius pars reflectatur, dimidia vero refringatur.

§. 336. Contra ea si quaedam pars luminis intercipiatur, ut in omni vitro solet, necessario ea erit incidenti proportionalis, quippe pendet a numero obstaculorum in quae incurrit, & a densitate luminis quod incidit. Quare faciendum erit $v = N$, $\mu = M$. Manebit ergo ratio inter lumen reflexum & refractum, etsi variabilis sit utriusque ad admissum ratio, atque incidentis densitas.

§. 337. Aut ergo omnia me fallunt, aut quantitas luminis reflexi & in casu perfectissimae transparentiae (§. 324.) non modo non destruitur, sed potius augetur, cum pars eius acedat, quod a vitris minus diaphanis dispergitur.

§. 338. Cum igitur ea vitra nobis hic sint perfecte pellucida, in quibus est $M + N = 1$, siue in quibus summa luminis reflexi & refracti aequatur quantitati incidentis, hac eius notione in capite praesenti utemur, ut cete-

ra quoque eius sumptomata ad liquidum perducere liceat.

EXPERIMENTVM X.

§. 339. Per exiguum foramen A in cameram obscuram intromittatur radius luminis AB, isque excipiat sub angulo obliquiore ABP a tabula vitrea satis crassa, atque lumen vitrum ingressum successiue reflexum videbis viam percurrere BCDEFEG &c. ita ut puncta B, C, D, E &c. veluti radiantia visibilia sint. Porro quod residuum est lumen in puncta ista, C, D, E, F &c. incidit, ibidemque refringitur atque in aerem eius partem transmigrare obseruabis. Ante vero eius in vitrum ingressum, dum in B incidit, iam ibi eius partem vides reflexam. Quodsi ergo radii isti in aerem regressi supra & infra tabulam charta excipiantur, plures in ea videbis solis imagines. Harum prima quae a puncto B prouenit debiliior est, secunda quae post duas refractiones a puncto C procedit clarior erit. Sequentes, quae post plures reflexiones in utraque charta depinguntur successiue secunda erunt obscuriores, ita crescente obscuritate, ut imago decima aut duodecima visum fere effugiat. Aucto angulo incidentiae ABP, vel apertura foraminis A, vel sumpta tabula vitrea minus crassa, imagines istae confunduntur, ut unicam constituere videantur, cuius extremitates medio erunt paullo obscuriores.

§. 340. Patet ergo hinc luminis a plano vitreo reflexi & refracti quantitatem ex infinitis fere imaginibus esse compositam. Etsi enim
in

Fig. 34.

in experimento non infinitae videantur, attamen nullum est dubium quin adhuc reuera adsint adeo obscurae, quae visui sese subducant. Ut adeo si summa claritatis cunctarum imaginum quaeratur, perinde sit, infinitus ponatur earum numerus nec ne. Eam enim summam si per seriem infinitam exprimamus, cuius singuli termini claritatem cuiusdam imaginis exprimant, series ista non potest non esse admodum conuergens, ut adeo summa utique parum alteretur, siue termini postremis propiores omittantur siue eorum quoque habeatur ratio. Hoc vero illi praestare ob calculi concinnitatem mox videbimus.

§. 341. Sit iam densitas luminis incidentis in B $= 1$, reflectatur eius pars $= q$. refringatur pars n . Eritque $q + n = 1$, quoties vitrum sumitur esse perfecte pellucidum siue nullum lumen dispergens, quale in praesenti capite illud esse ponimus.

§. 342. Similiter dicto lumine intra vitrum in C incidente $= 1$, quantitas reflexa vocetur p , refracta m , erit quoque $p + m = 1$, posito nempe iterum vitro perfecte pellucido. Literae vero istae q, n, p, m in toto capite praesentis & sequente hunc quam ipsis hic tribuimus, habebunt significatum, quod & de maiusculis valet, quibus mox utemur.

§. 343. Erit ergo claritas

imaginis $B = q$

$C = nm$

$D = npm$

$E = nppm$

$F = np^3m$ &c.

adeo-

adeoque quantitas luminis sursum reflexi & re-

fracti, quam supra vocauimus M , erit

$M = q + nmp + nmp^2 + nmp^3 + nmp^4 + \&c.$

Similiter quantitas luminis deorsum refracti

$N = nm + nmp^2 + nmp^4 + nmp^6 + \&c.$

Termini seriei M exhibent claritates imagi-

num B, D, F, H &c. seriei N vero imaginum $C,$

E, G, I &c.

§. 344. Utraque ista series est progressio

geometrica conuergens, cuius ergo summa

datur, eritque

$M = q + \frac{nmp}{1 - pp}$

$N = \frac{nm}{1 - pp}$

adeoque

$M = q + pN.$

§. 345. Cum iam pro vitris perfecte pel-

lucidis sit $q + n = 1, p + m = 1.$ substitutione facta

erit

$M = q + \frac{np}{1 + p} = \frac{q + p}{1 + p}$

$N = \frac{n}{1 + p} = \frac{1 - q}{1 + p} = \frac{n}{2 - m}$

hinc

$M + N = \frac{q + p}{1 + p} + \frac{1 - q}{1 + p} = \frac{1 + p}{1 + p} = 1.$

quod etiam esse debet, quippe vitrum nullum

lumen dispergere assumimus.

§. 346. Valores literarum $q, p,$ quae vim

reflectentem superficiei vitri exterioris & in-

te rio-

L

848-2

terioris denotant, unico tantum plano vitreo adhibito definire nullo modo mihi licuit. Datur quidem methodus valorem q definiendi, qua infra utemur, at longe difficilius determinatur valor n , quippe necessario pendet a dispersione luminis, si vitrum non fuerit perfecte pellucidum. Contra ea valorem ipsius q a minori ista transparentia longe minus pendere iam supra vidimus. (§. 328. 329.)

§. 347. Notandum vero est, in toto hoc calculo radiorum quantitatem hic tantum incensum venire. Etenim utique eorum densitas in vitro a densitate in aere differt, atque duplici ex causa minor est. Etenim in vitro ad perpendicularum propius accedunt radii refracti, quod eorum ab inuicem distantiam auget, densitatem minuit. Porro pars eorum iam in superficie reflectitur, quo minuitur eorum quantitas adeoque & densitas. An celeritas, quae in vitro etiam diuersa est, quicquam ad augendam vel minuendam radiorum intensitatem faciat, liquido non constat. Insuper mirum in modum hic inter se dissentiunt NEWTONVS atque EVLERVS & quicunque ab horum partibus stant Optices scriptores. NEWTONVS celeritatem in vitro auctam, EVLERVS eandem imminutam statuit. Nobis vero hic perinde est, cuicunque parti adhaereas, cum sufficiat, radiorum quantitatem non alterari, distantiam & celeritatem, cum in aerem iterum egrediuntur veluti in integrum restitui, eandemque euadere, qualis erat ante eorum in vitrum ingressum.

§. 348. Quod ut clarius pateat, ponamus literas q, n, p, m , non significare radiorum quantitatem, sed ipsam luminis vim atque intensitatem, siue haec pendeat a densitate siue a celeritate radiorum, siue ab alia causa quacunque. Atque evidens est, non posse fieri $q+n=1, p+m=1$, uti fecimus in §. 345. adeo- nec posse reduci formulas (§. 344.)

$$M = q + \frac{nm}{1 - pp}$$

$$N = \frac{nm}{1 - pp}$$

$$M = q + pN.$$

sed eas integras manere.

§. 349. At vero in casu perfectae pellucida-
ditatis nilominus erit $M + N = 1$. adeoque
facere utique licet

$$M = 1 - N = q + pN$$

unde habetur

$$N = \frac{1 - q}{1 + p}$$

$$M = \frac{q + p}{1 + p}$$

Unde ergo manifestum est, easdem prodire
formulas, quas dedit computus quantitatis ra-
diorum (§. 345.) Hoc tantum adest discri-
men, ut literis n, m uti non detur, si istae
vim luminis denotent, quippe experimentis
valor summarum $q+n, p+m$ detegi plane nequit.
Contra ea uti ipsis licebit, simulac eas radio-
rum quantitatem denotare assumimus.

§. 350. Esse uero $N+M=1$, experimenta non docent, cum non detur vitrum nullos radios dispergens. Ratiocinio tantum hoc obtinere assequimur. Quodsi tamen successue sumantur vitra pellucidiora, facile patebit, summam $N+M$ eo magis ad unitatem accedere, quo vitra sunt pellucidiora.

EXPERIMENTVM XI.

Fig. 33. §. 351. Sint omnia ut in experimento IX^{mo}, absit sola recta IK, quacunque te vergas, videbis in quouis puncto tabulae vitreae Q, P utramque imaginem partis plani posticae ABHE & anticae EHED confusam, adeoque eiusdem luminis sub eodem angulo reflexi & refracti summam $N+M$. Quodsi iam vitrum esset perfecte pellucidum, haec summa deberet esse aequalis claritati plani AC nullo interueniente vitro visae. At iam in vicem unius tabulae iuxta se colloces plures, pelluciditate inter se diuersae, quod facile cognosces, partem plani anticam charta nigra obtegendo. Qua iterum sublata, sumam claritatum $N+M$ per singula vitra non modo videbis a claritate totius plani parum differre, sed eo minus differet, quo maior fuerit pelluciditatis gradus, ita ut adhibito vitro tenuissimo & instar adamantis pellucido, differentia ista inter summam $M+N$ & claritatem directam oculi aciem fere effugiat.

EXPERIMENTVM XII.

Fig. 35. §. 352. Radii solis siue candelae remotioris in planum album AB incidant sub directione

ne GB, FA. In B & A erigantur duae tabulae vitreae BD, CA ad directionem luminis & planum AB normales. Quo facto spatium AB illuminabitur a radiis ECAF quos vitrum AC reflectit, & a radiis FABG, qui vitrum BD permeant. Anguli incidentiae in utroque vitro & in plano AB sunt iidem, & sub iisdem lumen directe incidit in spatium anterius BH. Erit ergo claritas in AB = $N+M$, in BH = 1. At iam substitutis successive vitris magis pellucidis, siue iisdem iuxta se collocatis, claritatem in AB eo propius ad claritatem BH accedere videbis, quo maior fuerit utriusque vitri pelluciditas, ut sumtis iisdem maxime pellucidis differentia fere evanescat.

§. 353. Patet ergo in casu perfectae pelluciditatis poni posse $M+N=1$, adeoque & (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

$$N = \frac{1-q}{1+p}$$

§. 354. Sint iam in BI tabulae vitreae quotlibet sibi ita impositae ut sese non contingant. Fig. 36. In has incidat lumen AB sub angulo quocunque, atque patet, lumen post multifarias reflexiones & refractiones ita tandem diuisum iri, ut eius altera pars sursum reflectatur, nunquam in vitrum regressura, altera pariter vitra ista post se relinquens inferiora petat. Prius dicemus *reflexum* illudque referre ponemus rectam BC. Posterius, quod referat recta DE *refractum* vocabimus. Porro lumen incidens,

reflexum & refractum, ut inter se comparari possit efferemus per i, e, v . ita ut si incidens sit $= i$, reflexum dicatur $= e$, refractum $= v$.

§. 355. At iam tabulis istis vitreis aliae supponantur quotlibet EO, similis & in his fiet luminis incidentis distributio. Dicto ergo iterum incidente $= i$, fiat reflexum $= \omega$, refractum $= \mu$.

§. 356. Cum vitra ponantur perfecte pellucida, patet esse $e + v = i$, & $\omega + \mu = i$. ut adeo hoc modo e calculo instituendo istarum quantitarum duae eliminantur, cum formulas contrahere utile fuerit.

§. 357. Quodsi iam lumen in E incidens sit illud, quod vitra superius posita permeavit, erit istud $= v$, atque in EFH ita diuidetur, ut quantitas eius quae deorsum abit per GF sit $= v\mu$, quae sursum remeat $= v\omega$. Posterior haec quantitas iterum incidit in I, ibique de novo diuiditur, ut pars quae abit per KL sit $= v\omega\omega$ quae vitra inferiora petit $= v\omega e$. Similes porro cumpatiatur partitiones, ponamus lumen omne superiora petens $= \lambda$, deorsum cadens $= \kappa$, patet fore

$$\lambda = e + v\omega + e^2 v\omega^2 + v\omega^3 e + v\omega^4 e^2 + \text{etc.}$$

$$\kappa = v\mu + v\mu\omega e + v\mu\omega^2 e^2 + v\mu\omega^3 e^3 + \text{etc.}$$

Hae series sunt progressionibus geometricae convergentes, adeoque datur earum summa eritque

$$\lambda = \varrho + \frac{\nu\omega}{1-\omega\varrho}$$

$$\kappa = \frac{\nu\mu}{1-\omega\varrho}$$

§. 358. Formulae hae obtinent, qualiscunque sit vitrorum pelluciditas. At cum ea hic ponamus perfecte pellucida, erit $\varrho + \nu = \omega + \mu = 1$. Unde substitutione facta prodit

$$\lambda = \frac{\varrho + \omega - 2\varrho\omega}{1 - \omega\varrho}$$

$$\kappa = \frac{\nu\mu}{\nu + \mu - \nu\mu}$$

Quo ergo modo datur lumen a cunctis vitris reflexum & refractum per illud, quod a superioribus & inferioribus sigillatim reflectitur & refringitur, siue datur λ per ϱ & ω , κ vero per ν & μ .

§. 359. Quod si iam unico vitro in E relicto, in B successive ponantur vitra 0, 1, 2, 3, 4 &c.... (x-1), ut numerus cunctorum fiat 1, 2, 3, 4, 5.... x, substitutione facta facile ex utraque hac formula eruentur sequentes, ut sit quantitas luminis

a plano reflexa refracta
uno $M = M$ $N = N$

duobus $P = \frac{2M}{1+M}$ $Q = \frac{N}{2-N}$

$$\begin{array}{ll}
\text{tribus.....} R = \frac{3M}{1+2M} & \text{.....} S = \frac{N}{3-2N} \\
\text{quatuor.....} T = \frac{4M}{1+3M} & \text{.....} V = \frac{N}{4-3N} \\
\text{quinque.....} L = \frac{5M}{1+4M} & \text{.....} K = \frac{N}{5-4N} \\
\text{sex.....} I = \frac{6M}{1+5M} & \text{.....} H = \frac{N}{6-5N} \\
\text{\&c.....} & \text{\&c.} \\
\text{x.....} X = \frac{xM}{1+(x-1)M} & Y = \frac{N}{x-(x-1)N}
\end{array}$$

§. 360. Data ergo luminis quantitate ab uno vitro reflexa & refracta, datur ea, quae a vitris quotcunque x iunctim sumtis reflectitur & refringitur. Quantitates vero istae Y decrescunt ut ordinatae hyperbolae intra asymptoton aequae distantes, X vero esse earum ad unitatem complementum vel per se est evidens. Pro hyperbola logarithmicam sumsit cel. BOVGVER in tractatu supra laudato (§. 315.) At infinitas istas reflexiones in calculum suum non induxit. Sumsit enim lumen v. gr. per HI reflexum a vitris inferioribus aut non reflecti deorsum, aut debilius esse, quam ut ipsius ratio haberi debeat. Hoc enim silentio praeterit. Ceterum in capite sequente videbimus, cel. huius Auctoris placita magis ad veritatem accedere si vitra sumantur, ut reuera sunt, minus nempe pellucida, etsi cum veritate nec in hoc casu perfecte coincidunt.

§. 361. Ex formulis istis iam vel sua sponte patet, aucto vitrorum numero augeri quoque quan-

quantitatem luminis reflexi, ita ut incidenti tandem euadat aequalis. Contra ea minuetur quantitas refracta, siue quae per cuncta vitra transit.

§. 362. Cum vitra perfecte pellucida actu non dentur, nulla quantitatum M, N, P, Q &c. experimentis seorsim definiri poterit. Quod si vero inter binas M, N; P, Q; R, S &c. quae ad eundem vitrorum numerum pertinent, comparatio sit instituenda, fieri hoc poterit multiplici modo, independenter a vitrorum transparentia. Patet enim lumen reflexum & refractum, cum singula vitra simili ratione permeare debeat, simile quoque pati quantitatis decrementum, utrumque ergo eadem ratione a particulis vitri dispergentibus minui. Et si quae unquam adest differentia, plane ista fiet insensibilis & contemnenda, simulac experimenta instituantur, vitris adhibitis, quae maxime sunt diaphana.

§. 363. His ita praenotatis eos primo per-
lustrabimus Casus, quibus lumen reflexum refracto est aequalis. Experientia, quibus demonstratur, lumen obliquius in vitrum incidens, fortius reflecti, fusius hic non describemus. Infinita huiusce modi excogitare haud est difficile, atque infra quaedam occurrent, cum alias ob causas iis utemur. Cum ergo aucto vitrorum numero augeatur quantitas luminis reflexa, (§. 362,) eadem haec vero minuatur crescente angulo incidentiae, consequens est, cuilibet vitrorum numero 1, 2, 3, 4 &c respondere angulum, sub quo lumen reflexum refracto sit aequale. Anguli isti suo

ordine vocentur A, B, C, D, E, F &c. ita ut A respondeat vitro uni, B duobus, C tribus &c, sitque pariter angulus A primus, B secundus, C tertius &c. Ita v. g. experimento IX. (§. 332.) constat angulum A esse $= 14\frac{1}{2}$ gr. Quales sint ceteri infra videbimus.

§. 364. At iam formulae §. 359. ita inter se cohaerent, ut datis quantitatibus X, Y pro angulo incidentiae quocunque, & vitrorum numero quocunque, simul dentur quantitates M, N, P, Q, R, S &c. alii cuilibet vitrorum numero 1, 2, 3, 4, &c, sed eodem angulo pro singulis retento, respondentes. Duplici ergo modo variatur vitrorum numerus. Prior, quem haecenus vocauimus $= x$, ordinem anguli A, B, C, D &c. seruat, sub quo lumen reflexum a vitris x refracto est aequalis. Alter numerus, quem per z efferemus, variabilis esse potest, manente angulo numeroque vitrorum x ipsi respondente.

§. 365. Quae distinctio ut fiat euidentior, sit angulus L , sub quo lumen in x vitra incidens aequae diuiditur reflexione & refractione, patet fore $X=Y=\frac{1}{2}$, adeoque (§. 359.)

$$\frac{1}{2} = \frac{xM}{1+(x-1)M} = \frac{N}{x+(x-1)N}$$

Unde erit

$$\begin{aligned} N &= x : (1+x) \\ M &= 1 : (1+x) \\ x &= N : M. \end{aligned}$$

Datur ergo lumen ab unico vitro sub angulo L reflexum M , & refractum N , per numerum vitrorum x , quae iunctim sumta lumen sub eodem

eodem angulo L incidens ita diuidunt, ut reflexum X refracto Y sit aequale. -

§. 366. His ergo valoribus in formulis §. 359. substitutis dabitur quoque P, Q, R, S, T, V &c. siue lumen a quolibet alio vitrorum numero sub eodem angulo L reflexum & refractum. Dicto ergo hoc vitrorum numero $= z$, lumine reflexo $= \xi$, refracto $= \eta$. patet generalissime fore

$$\xi = \frac{x}{x+z}$$

$$\eta = \frac{z}{x+z}$$

§. 367. Ita vero hae formulae comparatae sunt, ut manente angulo L , maneat numerus vitrorum x , quippe qui ab angulo isto pendet (§. 363.) variabilis vero erit z . Contra ea mutato angulo L , ut sit A, B, C , &c. mutabitur quoque x , ut sit $1, 2, 3$ &c. & numerus vitrorum z referetur ad angulum istum immutatum. Sic ergo in genere erit lumen a z vitris sub angulo - - - reflexum - - - refractum

I° A	- - -	$\frac{1}{1+z}$	- - -	$\frac{z}{1+z}$
II° B	- - -	$\frac{2}{2+z}$	- - -	$\frac{z}{2+z}$
III° C	- - -	$\frac{3}{3+z}$	- - -	$\frac{z}{3+z}$
IV° D	- - -	$\frac{4}{4+z}$	- - -	$\frac{z}{4+z}$

V°

§. 369. Ex hac tabella, quae facile in longum & latum ulterius extendi potest, vel per se patet, singulos angulos *A, B, C, &c.* pluribus modis experimentis detegi posse. Quærendus sit v. gr. angulus *B* adhibitis tribus vitris. Erit lumen a tribus vitris reflexum $R = \frac{3}{2}$, refractum $S = \frac{2}{3}$, unde $R:S = 3:2$. Is ergo quaerendus est angulus, sub quo lumen in tria vitra incidens ita diuiditur, ut pars reflexa se habeat ad refractam in ratione $3:2$. Experimenta, quae hunc in finem institui, infra descripta dabo una cum aliis, quae ad determinandos valores *q, p* faciunt. Jam vero lubet methodum ostendere, cuius ope quantitatum *q, p* pro singulis angulis determinantur limites, quos excedere nequeunt. Ita fiet, ut etiamsi valores isti experimentis exacte determinari non possent, nilominus pro angulis *A, B, C &c.* quam proxime innotescant. Utilitate sua haec methodus in rebus physicis non caret, etsi parum adhuc usitata sit. Unicum est quod sciam exemplum a summo NEWTONO excogitatum, cum modum ostenderet, quo ex data longitudine caudae cometae adparente eiusque elongatione a sole distantiae geocentricae ipsius cometae limites figuntur. Vid. eius *Systema Mundi*, quod exeat in *Opusculis*, Tom. II.

§. 370. Ut ergo rem ipsam adgrediamur, recordandum est, pro angulo x^o (§. 364.) esse (§. 365.)

$$M = \frac{1}{1+x}$$

$$N = \frac{x}{1+x}$$

Porro esse uniuersaliter (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

$$N = \frac{1-q}{1+p}$$

Quibus ergo valoribus aequatis erit

$$\frac{1}{1+x} = \frac{q+p}{1+p}$$

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1-q}{1+p}$$

Unde porro

$$p = \frac{1-q-xq}{x}$$

$$q = \frac{1-p}{1+x}$$

§. 371. At iam vel se patet, necessario esse

$$p > 0$$

$$p < 1$$

$$q > 0$$

$$q < 1$$

Lumen enim reflexum neque negatiuum neque incidenti maius esse potest. Ex altera positione, $p < 1$ & $q < 1$ nil sequitur quod ad rem face-

faceret. Unde priorem tantum perlustrabi-
mus, eritque

$$\frac{1-q-xq}{x} > 0 \quad \frac{1-px}{1+x} > 0$$

adeoque

$$q < \frac{1}{1+x} \quad p < \frac{1}{x}$$

Quodsi ergo pro x successive substituatur, 1,
2, 3, 4 &c. limites quantitatuum q, p , pro an-
gulis A, B, C, D &c. sequenti exhibere licet
tabella.

Sub angulo debet esse lumen reflexum a su-
incidentiae perficie vitri exteriori interiore

1°	A	-	-	-	-	$q < \frac{1}{2}$	$p < \frac{1}{1}$
2°	B	-	-	-	-	$q < \frac{1}{3}$	$p < \frac{1}{2}$
3°	C	-	-	-	-	$q < \frac{1}{4}$	$p < \frac{1}{3}$
4°	D	-	-	-	-	$q < \frac{1}{5}$	$p < \frac{1}{4}$
5°	E	-	-	-	-	$q < \frac{1}{6}$	$p < \frac{1}{5}$
6°	F	-	-	-	-	$q < \frac{1}{7}$	$p < \frac{1}{6}$
&c.						&c.	&c.

§. 372. Ut in hac tabella limites ipsius q
angustiores sunt illis, quibus circumscripta est
quantitas p , ita reuera quoque experimentis
inuenitur esse constanter $q < p$, siue superficiem
vitri interiorem lumen copiosius reflectere,
quam vero reflectitur a superficie exteriori.
Unde ergo noui dabuntur limites prioribus
angustiores. Erit enim

$$\frac{1-q-xq}{x} > q \quad \& \quad \frac{1-px}{1+x} < p$$

adeo-

adeoque

$$q < \frac{1}{1+2x} \quad p > \frac{1}{1+2x}$$

Quare pro x successive substituendo 1, 2, 3, 4
&c. erit pro angulis

$$\begin{array}{llll} \text{I}^\circ A & - & q < \frac{1}{3} & - & p > \frac{1}{3} & - & \text{sed } p < 1 \\ \text{II}^\circ B & - & q < \frac{1}{5} & - & p > \frac{1}{5} & - & p < \frac{1}{2} \\ \text{III}^\circ C & - & q < \frac{1}{7} & - & p > \frac{1}{7} & - & p < \frac{1}{3} \\ \text{IV}^\circ D & - & q < \frac{1}{9} & - & p > \frac{1}{9} & - & p < \frac{1}{4} \\ \text{V}^\circ E & - & q < \frac{1}{11} & - & p > \frac{1}{11} & - & p < \frac{1}{5} \\ \text{IV}^\circ F & - & q < \frac{1}{13} & - & p > \frac{1}{13} & - & p < \frac{1}{6} \\ & & \&c. & & \&c. & & \&c. \end{array}$$

$$\text{X}^\circ \quad - \quad q < \frac{1}{1+2x} \quad p > \frac{1}{1+2x} \quad - \quad p < \frac{1}{x}$$

Limites ergo ipsius q cadunt intra 0 & $\frac{1}{1+2x}$,

ipsius p vero intra $\frac{1}{x}$ & $\frac{1}{1+2x}$ continentur.

§. 373. Porro aut semper aut certe sub
angulis incidentiae maioribus quales sunt an-
guli A, B, C &c. inuenitur esse $M \geq p$. Sed
est (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p} = p + \frac{q-pp}{1+p}$$

Unde erit plerumque $q-pp$ quantitas positiva,
quare

$$q-pp > 0 \\ q > pp$$

Sed

Sed iam vidimus esse $p > \frac{1}{1+2x}$ (§. 372.) quare
erit

$$q > \frac{1}{(1+2x)^2}$$

Et ob

$$q = \frac{1 - px}{1+x}$$

erit

$$\frac{1 - px}{1+x} > \frac{1}{(1+2x)^2}$$

adeoque

Quare iam limites erunt, pro angulis

$$\begin{array}{l} 1^\circ A - - q > \frac{1}{9} - - q < \frac{1}{9} - - p > \frac{1}{9} - - p < \frac{7}{9} \\ 2^\circ B - - q > \frac{1}{25} - - q < \frac{1}{5} - - p > \frac{1}{5} - - p < \frac{11}{25} \\ 3^\circ C - - q > \frac{1}{49} - - q < \frac{1}{7} - - p > \frac{1}{7} - - p < \frac{15}{49} \\ 4^\circ D - - q > \frac{1}{81} - - q < \frac{1}{9} - - p > \frac{1}{9} - - p < \frac{19}{81} \\ 5^\circ E - - q > \frac{1}{121} - - q < \frac{1}{11} - - p > \frac{1}{11} - - p < \frac{23}{121} \\ 6^\circ F - - q > \frac{1}{169} - - q < \frac{1}{13} - - p > \frac{1}{13} - - p < \frac{27}{169} \\ & \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^{ro} - - q > \frac{1}{(1+2x)^2} - - q < \frac{1}{1+2x} - - p > \frac{1}{1+2x} \\ - - p < \frac{3+4x}{(1+2x)^2} \end{array}$$

§. 374. Hos limites ita iam contrahemus, ut
pateat quantum a medio arithmetice inter
extrema sumto ipsa extrema utrinque distent.
Erunt ergo limites

M

Sub

Sub angulo	pro lumine q	pro lumine p .
1° A - - -	$\frac{2}{9} + \frac{1}{9}$ - - -	$\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
2° B - - -	$\frac{3}{25} + \frac{2}{25}$ - - -	$\frac{8}{25} + \frac{3}{25}$
3° C - - -	$\frac{4}{49} + \frac{3}{49}$ - - -	$\frac{11}{49} + \frac{4}{49}$
4° D - - -	$\frac{5}{81} + \frac{4}{81}$ - - -	$\frac{14}{81} + \frac{5}{81}$
5° E - - -	$\frac{6}{121} + \frac{5}{121}$ - - -	$\frac{17}{121} + \frac{6}{121}$
6° F - - -	$\frac{7}{169} + \frac{6}{169}$ - - -	$\frac{20}{169} + \frac{7}{169}$
&c.	&c.	&c.

$$x^{to} \frac{1+x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{(1+2x)^2} \dots \frac{2+3x}{(1+2x)^2} + \frac{1+x}{1+2x^2}$$

§. 375. Cum vero nequaquam verosimile sit, quantitates q, p alterutri limiti esse notabiliter propiores, haud multum aberrabimus, si eas medio isti arithmetice proportionali aequales esse statuamus, ut proxime sit pro angulis

1° A - - -	$q = \frac{2}{9}$ - - -	$p = \frac{5}{9}$
2° B - - -	$q = \frac{3}{25}$ - - -	$p = \frac{8}{25}$
3° C - - -	$q = \frac{4}{49}$ - - -	$p = \frac{11}{49}$
4° D - - -	$q = \frac{5}{81}$ - - -	$p = \frac{14}{81}$
5° E - - -	$q = \frac{6}{121}$ - - -	$p = \frac{17}{121}$
6° F - - -	$q = \frac{7}{169}$ - - -	$p = \frac{20}{169}$
&c.	&c.	&c.

$$x^{to} - - - q = \frac{1+x}{(1+2x)^2} \dots p = \frac{2+3x}{(1+2x)^2}$$

Verae itaque quantitates q, p ab his, quae mediae sunt parum distabunt.

§. 376. Quantitates hae mediae, ut & limites, quibus veras circumscriptas esse ostendi-

dimus, ab experimentis fere non pendent, unde eo maioris sunt faciendi, quo pluribus aberrationibus experimenta, quibus verae determinandae sunt, obnoxiae esse possunt. Cum enim quoduis experimentum a vero plus minusue aberret, saltem aberrare possit, facile patet, multiplicatum errorem esse metuendum, simul ac pro determinanda quantitate plura experimenta combinanda sunt. Quod cum in praesenti casu contingat, solatio quodammodo erit, cum videbimus, quantitates q, p experimentis definitas intra praescriptos limites contineri, & a mediis, quas determinauimus, fere non esse diuersas. At iam primo definiendi sunt anguli A, B, C &c.

EXPERIMENTVM XIII.

§. 377. Sint omnia ut in experimento IX. (§. 332.) in vicem unius tabulae vitreae successiue substitui duas, tres, quatuor &c. atque eodem modo eum quaesitum oculi O , quo rectae ILK imago reflexa & refracta acque videbatur cinerea vel aequae colorata. Quo repperito metitus sum angulos incidentiae in Q & P . Experimentum hoc iisdem variatis circumstantiis eodem modo quo experimentum mox citatum instauravi, atque inueni angulos incidentiae pro

Fig. 33

vitris

1	=	14 $\frac{1}{2}$ gr.
2	=	22.
3	=	27.
4	=	31.
5	=	35.

vitris

6	=	39gr.
7	=	43
8	=	47
9	=	50 $\frac{1}{2}$.

M 2

§. 378.

§. 378. Plures angulos non quaesivi, cum viderem eos difficilius determinatum iri. Et enim iis notabiliter mutatis claritatem imaginum nihilominus parum mutari observaui. Ceterum finitum esse eorum numerum facile patet, & ex formulis (§. 370.)

$$p = \frac{1 - q - qx}{x}$$

$$q = \frac{1 - px}{1 + x}$$

necessaria consequentia euincitur. Sumto enim numero vitrorum vel angulorum x infinito, foret $p = -q$. adeoque negativa, quod absolum est, quia utraque quantitas q, p constanter est > 0 .

§. 379. At iam eodem modo, quo supra vidimus, pro angulo primo esse $M = N$ (§. 334.) patebit pro sequentibus esse $P = Q, R = S, T = V$ &c. Adeoque vi definitionis (§. 363.) anguli his experimentis definiti, iidem sunt, quos A, B, C, D, E &c. vocauimus. Est ergo.

$$A = 14\frac{1}{2}\text{gr.}$$

$$F = 39\text{gr.}$$

$$B = 22.$$

$$G = 43$$

$$C = 27.$$

$$H = 47$$

$$D = 31.$$

$$I = 50\frac{1}{2}$$

$$E = 35.$$

§. 380. His experimentis quilibet istorum angulorum peculiari numero vitrorum exploratur. Ut vero, quod supra promissimus (§. 369.) ostendamus, singulos, quotlibet adhibitis vitris inueniri posse, videamus quomodo unico tantum vitro determinantur. Quem
in

in finem tabulam §. 368. ingrediendo, observamus esse debere pro angulo incidentiae

A	$-$	M	$=$	$\frac{1}{2}$	$-$	N	$=$	$\frac{1}{2}$	adeoque	$M:N$	$=$	$1:1$
B	$-$	$-$	$=$	$\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$=$	$\frac{2}{3}$	$-$	$-$	$=$	$1:2$
C	$-$	$-$	$=$	$\frac{1}{4}$	$-$	$-$	$=$	$\frac{3}{4}$	$-$	$-$	$=$	$1:3$
D	$-$	$-$	$=$	$\frac{1}{5}$	$-$	$-$	$=$	$\frac{4}{5}$	$-$	$-$	$=$	$1:4$
E	$-$	$-$	$=$	$\frac{1}{6}$	$-$	$-$	$=$	$\frac{5}{6}$	$-$	$-$	$=$	$1:5$
F	$-$	$-$	$=$	$\frac{1}{7}$	$-$	$-$	$=$	$\frac{6}{7}$	$-$	$-$	$=$	$1:6$
&c.		&c.		&c.		&c.		&c.				&c.

Sic ergo instituendum erit experimentum, ut quaerantur anguli, sub quibus lumen reflexum est ad refractum in ea ratione, quam tabellae haec ostendit.

EXPERIMENTVM XIV & THEOREMA XXII.

§. 381. Incidat lumen in chartam albam Fig 37. ED secundum directionem parallelam LD. Tabula vitrea AB ita inclinetur, ut lumen per CE reflexum, & per CD refractum spatia chartae EA, AD aequae illuminet. Similibus vero hic opus est cautelis, quibus in experimento nono utendum fuit. Iam dico lumen reflexum esse ad refractum ut AE ad AD, siue esse

$$M:N=AE:AD.$$

Quod si ergo vitrum successive ita inclinetur, luminisque positio vel positio chartae debite mutetur, ut non modo obtineat illuminationis spatiorum AE, AD aequalitas, verum & ratio inter rectas AE, AD ea sit, quae vi praecedentis tabellae (§. 380.) cuilibet angulorum A, B, C, D &c. debetur. Anguli incidentiae LBC istis ipsis angulis A, B, C, D &c. erunt

M 3

ae

aequales, ut adeo illis mensuratis hi innotescant.

DEMONSTRATIO.

Ob radios parallelos, erit illuminatio directe ut eorum, numerus, reciproce ut spatium in quod incidunt. At dicto numero radiorum in vitrum CA incidentium $\equiv 1$, numerus eorum, qui in spatium FA reflectuntur, erit $\equiv M$, qui in spatium AD refringuntur $\equiv N$. Unde erit claritas spatii EA $\equiv M : EA$, spatii AD vero $\equiv N : AD$. At vero utraque in experimento facta est aequalis, quare habetur

$$\frac{M}{EA} = \frac{N}{ED}$$

siue

$$M : N = EA : ED.$$

Quod erat demonstrandum.

§. 382. Operosius est hoc experimentum, cum duo simul anguli, incidentiae nempe & inclinationis determinandi sint. Quare iuua-bit utriusque rationem determinare. Sit ergo $AC \equiv 1$, angulus incidentiae $BCL \equiv ECA \equiv ACD \equiv b$, angulus inclinationis $CAE \equiv c$, erit

$$EA : \sin b \equiv 1 : \sin (b + c)$$

$$AD : \sin b \equiv 1 : \sin (c - b)$$

$$EA : AD \equiv \sin (c - b) : \sin (c + b)$$

At in experimento nostro debet esse

$$EA : AD \equiv M : N$$

Quare erit

$$M : N \equiv \sin (c - b) : \sin (c + b)$$

Unde

Unde fit

$$\text{tang } c = \frac{M+N}{N-M} \text{ tang } b$$

§. 383. Quodsi debeat esse $M=N$, ut in experimento IX (§. 332.) erit

$$\text{tang } c = \frac{2M}{0} \text{ tang } b = \text{infin.}$$

Hoc ergo casu angulus CAE necessario rectus esse debet.

§. 384. Porro vidimus datis quantitatibus M, N datos respondere angulos incidentiae b , adeoque simul definitus est angulus inclinationis c . Ut adeo alter ab altero necessario pendeat. At cum independenter ab omni alio experimento neuter eorum seorsim detur, patet utrumque simul tentando esse quaerendum, & formula eruta eatenus tantum usui erit, quatenus facilius absoluitur tentamen.

§. 385. Ut ergo operosius est hoc experimentum, ubi quaeruntur anguli A, B, C &c. ita contra facilius erit, si quaeratur ratio inter quantitates M, N , pro dato quolibet angulo incidentiae LCB. Hinc factum est, ut unicuique tantum experimentum sumerem, quo esse debebat $EA : AD = M : N = 1 : 2$. atque angulum LCB inueni fuisse $= 22\frac{1}{2}\text{gr}$, qui ergo proxime coincidit cum eo valore, quem in experimento praecedenti pro angulo secundo B inueni. Est vero ob

$$M + N = 1.$$

& $M : N = 1 : 2.$

$$M = \frac{1}{3}, N = \frac{2}{3}.$$

M 4

quod

quod etiam esse debet. (§. 368.) Idem experimentum institui posse, pluribus adhibitis vitris, ita est evidens, ut ipsi diutius immorari non opus sit. Videamus iam, quomodo determinantur quantitates q, p . pro angulis A, B, C, D &c.

EXPERIMENTVM XV.

Fig. 38. §. 386. Chartae albae AD verticaliter impositui tabulam vitream AB, ut lumen secundum directionem parallelam LE incidens reflecteret in AH. Iuxta hanc tabulam inclinaui prisma vitreum AC, quod lumen secundum eandem directionem LF incidens reflecteret in AG, spatiumque AG aequae illuminaret ac spatium HA illuminabatur a tabula vitrea AB. Dedi vero operam ut in utrumque hoc spatium nullum incideret lumen alienum, aut saltem si quod incideret hoc maxime esse tenue. Quo facto dimensus sum angulos incidentiae LEB, LFC & rectas EH, AG, & experimento bis iterato inveni fuisse in

	Exper. I.	Exper. II.
AE - - -	= 1 - - -	= 1.
AH - - -	= 0,90 - - -	= 2,10
AG - - -	= 0,67 - - -	= 1,02
Ang CAE - -	= 15° - - -	= 19°.
LEB - - -	= 42° - - -	= 65°.
LFG - - -	= 27° - - -	= 46°.

§. 387. At iam per utrumque experimentum praecedens, siue quod eodem recidit per tabulas §. §. 368. 379. datur quantitas luminis a plano vitreo AB reflexi, quod in toto hoc

hoc capite & in sequenti denotat litera M. Porro quantitatem luminis in spatia tabulae vitreae & prismatis AE, AF incidentis, cum aequalis sit, designauimus per unitatem. Quo posito vel per se est euidens, quantitatem luminis a prisma reflexam esse eam, quam supra per q expressimus. Erit ergo

$$\text{claritas spatii AG} = \frac{q}{AG}$$

$$\text{spatii AH} = \frac{M}{AH}$$

Cum vero experimento utraque sit aequalis erit

$$\frac{q}{AG} = \frac{M}{AH}$$

adeoque

$$q = \frac{M \cdot AG}{AH}$$

§. 288. Sed in experimento priori angulus incidentiae $LEB = 42^\circ$. cadit intra angulos (§. 379. 368.)

$$F = 39^\circ \text{ sub quo est } M = \frac{1}{7}$$

$$G = 43^\circ - - - - - = \frac{1}{8}$$

Sumto ergo parte proportionali, quod hic utique facere licet, erit pro angulo $LEB = 42^\circ$,

$$M = \frac{1}{8} \div \frac{1}{224} = 0,12054$$

adeoque ob

$$q = \frac{M \cdot AG}{AH} = \frac{67 \cdot M}{90}$$

erit

$$q = 0,08972,$$

M s

quae

quae ergo est quantitas luminis a superficie prismatis exteriori sub angulo $LFC = 27^\circ$ reflexi. Cum hic angulus sit angulus C , quantitas q , quam inter limites mediam esse supra vidimus (§. 375.) est $= \frac{4}{49} = 0,08163$. quae adeo ab inuenta vera tantum differt parte 0,00809. siue undecima circiter parte. Ut ergo vera quam hic invenimus non modo extra limites non euagetur, verum & parum absit quin in medium cadat (§. 376.)

§. 389. Porro cum in eodem hoc experimento sit angulus $LFC = 27^\circ = \text{ang. } C$, erit pro hoc angulo $M = \frac{1}{4}$ (§. 379. 368.) Sed in genere est (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

siue

$$p = \frac{M-q}{1-M}$$

Unde substitutis valoribus

$$q = 0,08972$$

$$M = 0,25$$

habetur

$$p = 0,21370.$$

Quae ergo est quantitas luminis a superficie vitri interna reflexa, sub eo angulo, qui angulo $C = 27^\circ$ respondet. At supra invenimus esse quantitatem mediam (§. 375.)

$$p = \frac{11}{49} = 0,22449.$$

Differt adeo parte $= 0,01079$, siue circiter $\frac{1}{22}$ quae utique est contemnenda. Ut adeo & hinc pateat, quantum quantitates istae mediae veris sint vicinae.

§. 390. In experimento secundo erat angulus $BEL = 65^\circ$, cui respondere observaui $M = \frac{1}{13}$, adeoque $q = M \cdot AG : AH$, $AG = 1,02$, $AH = 2,10$, erat $q = \frac{1}{13} \cdot \frac{102}{210} = 0,03736$.

Quae ergo est quantitas luminis a superficie prismatis exteriori sub angulo $LFC = 46^\circ$ reflexi. At hic angulus proxime est angulus H (§. 379.) cui ergo cum respondeat quantitas media (§. 375.)

$$q = \frac{2}{289} = 0,03114.$$

differentia erit $= 0,00622$, siue sexta circiter pars ipsius q . Ut ergo, etsi angulus LFC non exacte sit $= H$, nilominus differentia ista satis sit exigua, eoque magis contemnenda, quo difficilior est determinatio quantitatis M angulis maioribus respondens, qualis in hoc casu est angulus LEB .

§. 391. Porro cum angulus LFC proxime sit $=$ angulo H , ipsi respondebit $M = \frac{1}{9}$, adeoque ob

$$p = \frac{M - q}{1 - M}$$

$$q = 0,03736$$

erit

$$p = 0,08297.$$

Sed eadem quantitas inter limites media (§. 375.) est

$$p = \frac{26}{289} = 0,08997$$

Unde differentia $= 0,007$ est circiter duodecima pars ipsius p . Ut adeo & hic sit paruitatis contemnendae.

EX-

EXPERIMENTVM XVI.

Fig. 39. § 392. Experimentum praecedens, iisdem
usus cautelis, ita instauravi, ut non modo
prisma AC, verum & ipsam tabulam vitream
AB ad planum chartae albae AD inclinarem,
eumque utriusque quaererem situm, ut lumen
secundum directionem LFE in utriusque super-
ficiem incidens, atque in spatia chartae AH,
AG reflexum, spatia ista aequè illuminaret.
Quo facto inueni fuisse

$$\begin{array}{ll} AE = 1 & \text{ang. BAD} = 57^\circ \\ AG = 0,47 & LEB = 25 \\ AH = 0,42 & LFC = 13\frac{1}{2} \\ & FAC = 11\frac{1}{2} \end{array}$$

§. 393. Est vero sub angulo (§. 368. 379.)

$$\begin{array}{ll} B = 22^\circ & \dots\dots\dots M = \frac{1}{3} \\ C = 27^\circ & \dots\dots\dots M = \frac{1}{4} \end{array}$$

adeoque sub angulo

$$LEB = 25^\circ \dots\dots M = 0,28333.$$

Unde ob

$$q = \frac{M \cdot AG}{AH}$$

$$\begin{array}{l} AG = 0,47 \\ AH = 0,42 \end{array}$$

erit

$$q = 0,31706.$$

quae ergo quantitas respondet angulo $LFC = 13\frac{1}{2}^\circ$. At quaerendo partem proportionalem pro hoc angulo inuenitur quantitas inter li-
mites media (§. 375.)

$$q = 0,26103.$$

Differentia ergo est $= 0,05603$. Quae etsi valde sit notabilis, attamen limites praefinitos non excedit.

§. 394. Similiter pro angulo $LFC = 13\frac{1}{2}^\circ$, erit proxime

$M = 0,52222$. adeoque ob

$$p = \frac{M - q}{1 - M}$$

erit

$$p = 0,54657.$$

At eadem quantitas inter limites media (§. 375) proxime est

$$p = 0,58696$$

Unde differentia $= 0,04039$ est circiter $\frac{1}{14}$ ipsius p .

§. 395. Plura experimenta non sumsi, cum admodum sint operosa & difficilius instituantur. Videamus iam, quale singulis statuendum sit pretium. Cum in experimento IX^o, & quod ipsi plane simile est, eodemque tendit, XIII^o facillime dignoscatur aequalitas claritatis utriusque imaginis (§. 332. 377.) utrumque variatis quoque singulis circumstantiis pluries instauravi, ut adeo anguli A, B, C, D &c. qui experimentis istis determinantur (§. 379.) non possint non esse veris proximi, ut si quae adest differentia, dimidium gradum ista excedere nequeat.

§. 396. Ut tamen & in his medium quod-

Fig. 40.

dam inter aberrationes istas sumere liceret, sequenti usus sum methodo, quae plurimis aliis quoque casibus adplicari poterit. Videmus vero supra (§. 380.) angulis A, B, C, D &c. respon-

respondere lumen reflexum $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ &c. Ducta ergo in charta maiori recta AZ, hanc feci $= \frac{1}{2}$, atque in ista abscidi partes $ZB = \frac{1}{3}, ZC = \frac{1}{4}, ZD = \frac{1}{5}, ZE = \frac{1}{6}$ &c.; ut adeo partes istae abscissae essent in ratione luminis sub angulis A, B, C, D &c. reflexi. Erecta porro in Z normali ZV, hanc ita in partes aequales divisi, ut initium Z responderet gradui $14\frac{1}{2}$, veluti in ipsa figura videre est. Quo facto, atque ductis ordinatis Bb, Cc, Dd &c. has ita determinavi, ut puncta b, c, d, e &c. responderent numero graduum angulorum B, C, D, E, F &c. siue quod idem est, excessum istorum angulorum supra angulum primum A denotarent. At iam vel per se evidens est, singula ista puncta A, b, c, d, e &c. debere esse in curva admodum regulari, simulac rite determinati sint anguli A, B, C, D &c. sin vero minus, puncta ista non poterunt non extra curvam iacere. Etsi vero utique dentur casus, quibus eiusmodi curva reipsa habet plures vel pauciores flexus sinuosos, hi tamen latere nequeunt, simulac puncta ista sibi satis sint vicina, atque experimenta curatius fuerint sumta. Hoc quippe casu & puncta ista, etsi non penitus exacta fuerit eorum positio, nilominus flexus istos aperte affectabunt. Pluribus quoque casibus ex ipsa rei natura eiusmodi flexus adesse debere, haud difficulter colligitur. Quod idem & in nostro exemplo locum habuisset, si partes abscissae AB, BC, CD, DE &c. assumtae fuissent aequales. Cum vero conducat ita rem peragere ut curva euadat simplicissima, quae dari potest, probe dispiciendum erit, quales

sumere

sumere conueniat abscissas, qualesque ordinatas.

§. 397. Determinata iam punctorum obseruatorum A, b, c, d &c. positione, eorum bina Ac, bd, ce &c. recta connexui, ut viderem quantum intermedia b, c, d &c. a recta ista distarent, & in quamnam partem rectae caderent. Quodsi enim ducta v. gr. recta Ac punctum intermedium, quod intra eam & axin AZ cadere deberet, extra eam cecidisset, ilico falsi & erronei quid adesse apertissime patuisset. Cum vero tantam anomalam non adesse viderem, curuam Ai ita duxi, ut esset quam maxime sibi ipsi similis, atque puncta ea, quae nimis aberrabant, utrinque relinqueret.

§. 398. Utique in his saniori crisi opus esse non est inficiandum. Sic v. gr. supra iam notauimus (§. 378.) angulos incidentiae maiores G, H, I &c. experimentis difficilius determinari. Unde factum est, ut aberrationes maiores in puncta f, g, h, i coniicerem, cum viderem ista cum prioribus a, b, c &c. minus conspirare. Ut porro examinare possem, an curua Ai manu ducta sibi constaret, vel an quibusdam in locis veluti angulata esset, id simili fere modo peregi, quo vulgo explorant oculis, an recta sit regula nec ne? Ut enim in hoc casu puncta regulae extrema media obtegere vel obumbrare debent, sic & cuiuslibet partis curuae b c, puncta quae extrema interiacent, uniformi modo a recta bc recedere debere per se est euidens.

§. 399. His ita peractis, sequentes inueni angulos A, B, C &c. quos medios vocare licebit.

$A = 14^{\circ} 30'$	$F = 38^{\circ} 54'$
$B = 22^{\circ} 0'$	$G = 42^{\circ} 58'$
$C = 27^{\circ} 8'$	$H = 47^{\circ} 2'$
$D = 31^{\circ} 10'$	$I = 50^{\circ} 41'$
$E = 34^{\circ} 54'$	

Utrumque angulum A & B intactum reliqui, cum eos ceteris exactiores esse scirem. Ceteros si cum iis quos experimenta dederunt compares, eos parum discrepare inuenies, ultimo saltem excepto, qui necessario maior esse debet.

§. 400. Cum vero iam hoc modo duxissem curuam, quaesiti abscissas siue quantitates M , quae singulis quinis gradibus, a 15° ad 50° usque responderent; atque inueni esse pro

ang. incid.	lumen reflexum M	ang. incid.	lumen reflexum M
- 15°	- 0,483	35°	- - 0,165
- 20	- 0,367	40	- - 0,136
- 25	- 0,279	45	- - 0,115
- 30	- 0,210	50	- - 0, 98

Similes numeri ex utraque tabella §. 379. 380. erui potuissent partem proportionalem quaerendo, at mea quidem sententia hi, quos hic sistimus exactiores sunt.

§. 401. At vero de his numeris idem monendum est, quod supra de medio arithmetico notauimus (§. 275. 279. 283.) Simulac enim aberrationes punctorum A, b, c, d &c. a defectu

fectu instrumentorum pendent, hac ratione tantum detegetur defectus medius, quippe quicunctis adhuc inhaerebit. Ceterum eiusmodi defectus in experimentis, ex quibus isti numeri deducti sunt, minus est metuendus, singula enim variatis circumstantiis fuerunt repetita (§. 332. 377.)

§. 402. Maioris momenti est quaestio, an lumen sub dato angulo incidentiae reflexum *M* sit ad lumen sub eodem angulo refractum *N* in ratione constanti, quaecunque sit vitri pelluciditas? Etsi enim experimentis IX^o & XIII^o constare videatur, quaestionem hanc esse affirmandam, cum & variis adhibitis vitris iidem tamen prodierint anguli *A*, *B*, *C* &c. attamen, quod non inficiandum est, utique dubium hic remanet. Potuisset enim in istis experimentis adesse differentia claritatis, quae oculi aciei sese subduceret, ut adeo tantum ad sensum constans esset ista ratio, nequaquam geometrio rigore.

§. 403. Sit ergo BGO vitrum minus pellucidum, radiosque dispergens, intra quod radius luminis *AB* eo modo reflectatur, quo cum reflecti supra (§. 339.) vidimus, atque evidens est, dum lumen successive percurrit rectas *BC*, *CD*, *DE* &c. continuo partem eius dispergi, quae lumini residuo est proportionalis. Sit ergo lumen quod est in *B* ad illud quod in *C* incidit ut 1 ad λ , patet claritatem imaginum *B*, *C*, *D*, *E*, *F* &c. successive fore q , $n\lambda m$, $nm\lambda^2$, $nm\lambda^3 p^2$, $nm\lambda^4 p^3$ &c. adeoque

Fig. 34.

N

M

$$M = q + nmp\lambda^2 + nmp^3\lambda^4 + nmp^5\lambda^6 + \text{etc.}$$

$$N = nm\lambda + nmp^2\lambda^3 + nmp^4\lambda^5 + \text{etc.}$$

siue

$$M = q + \frac{nm\lambda^2 p}{1 - \lambda^2 p^2}$$

$$N = \frac{nm\lambda}{1 - p^2 \lambda^2}$$

unde &

$$M = \lambda p N + q.$$

Quae ergo est relatio inter lumen a vitro minus pellucido reflexum & refractum.

§. 404. At iam in Experimento IX. invenimus sub angulo incidentiae $A = 14\frac{1}{2}$ gr. esse $M = N$, quare erit

$$M = q + \lambda p M$$

unde

$$M = \frac{q}{1 - \lambda p}$$

§. 405. Pro vitris nullum lumen dispergentibus est $\lambda = 1$, unde

$$M = \frac{q}{1 - p}$$

Cum vero sit $\lambda < 1$, simul ac vitrum fuerit minus pellucidum, erit quoque

$$1 - \lambda p > 1 - p$$

adeoque

$$\frac{q}{1 - \lambda p} < \frac{q}{1 - p}$$

Quare manente in utroque casu quantitate q , utique quantitas luminis a vitro minus pellucido reflexi & refracti minor erit ea, quam vitrum perfecte pellucidum reflectit & refringit.

git. At sub angulo incidentiae A utraque aequae minuitur, cum sit $M=N$.

§. 406. Quaestio vero ad hoc reducitur, ut definiatur, quodnam decrementum capiat lumen in experimentis supra descriptis, dum in vitro percurrit rectam BC , quae vix erat unius lineae digiti parisini. Admodum vero exiguum esse hoc decrementum vel per se patet, nisi data opera adhibeantur vitra impuriora vel encausto tineta. Mea quidem sententia & in vitris mediocriter pellucidis vix ad centesimam luminis partem excurret. Ponendo itaque $\lambda = 1 - \frac{1}{100}$, erit

$$M = q + pN - \frac{1}{100}pN$$

Cum vero q sit quantitas positiva & sub angulis incidentiae minoribus satis notabilis, erit

$$q + pN > q + pN - \frac{1}{100}pN$$

ut adeo decrementum, quod lumen reflexum M capit a minori vitri pelluciditate, parte sua centesima longe sit minus, meritoque ergo contemnendum. Sermo vero hic est de eo decremento, quod luminis reflexo proprium est, atque rationem $M:N$ variam reddere valet. Etenim praeter hoc utrumque lumen $M:N$ insuper decrementum capit, quod utrique est commune.

§. 407. Quodsi iam haec cum limitibus conferamus, intra quos vagum esse vidimus oculi iudicium (§. 265. seqq.) facile patebit, variationem inter rationem $M:N$ vel decuplo esse posse maiorem, antequam ab oculo detegatur differentia. Ut adeo non mirum sit, in experimentis supra traditis eosdem con-

stanter angulos $A, B, C, \&c$ prodiisse, etsi pro vitris minus pellucidis aliquanto esse debuissent maiores.

§. 408. Ponamus iam $\lambda = 1 - x$ atque x erit quantitas adeo parua, ut eius dignitates superiores reiici possint. Quare facta substitutione in formulis §. 403. erit proxime

$$M = q + \frac{nm p - 2nm x p}{1 - pp + 2ppx}$$

$$N = \frac{nm - nm x}{1 - pp + 2ppx}$$

Unde porro fit

$$N : M = \frac{nm - nm x}{q - ppq + nmp + (2ppq - 2nmp)x}$$

sive diuisione actu instituta, reiectisque iterum potestatibus $x^2, x^3 \&c$

$$N : M = \frac{nm}{q - pp + nmp} - \frac{nm x (ppq + q - nmp)}{(q - pp + nmp)^2}$$

Huius aequationis membrum primum solum obtinet, ubi vitrum fuerit perfecte pellucidum. Membrum secundum indicat, quantum minuatur ratio inter lumen refractum & reflexum, si vitrum minus fuerit pellucidum. Patet vero hoc casu lumen refractum aliquanto magis debilitari quam reflexum.

§. 409. Ut vero hanc formulam rudiori saltem exemplo illustremus, vidimus supra pro angulo A esse proxime $q = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{2}$ (§. 393. 394) unde $n = \frac{3}{4}, m = \frac{1}{2}$ his valoribus substitutis erit

$$N : M = 1 - \frac{1}{3}x.$$

Cum ergo x sit vix $\frac{1}{50}$, patet in casu perfectae pelluciditatis fore $N : M = 1$. pro vitris minus pellucidis, qualia in superioribus experimen-

tis

tis adhibui, $N: M = 1 - \frac{1}{150}$. Ut adeo differentia non modo sit nihil facienda, verum & contemni adhuc posset, si vitri pelluciditas vel decies maior fuisset. Porro, quod ex tabella §. 400. patet, quantitas M sub angulis minoribus adeo celeriter decrescit, ut etsi pro $N: M = 1$, substitueretur $N: M = 1 - \frac{1}{20}$, atamen differentia inter angulos vix dimidio gradui foret aequalis. Est enim

pro angulo $14\frac{1}{2}^\circ$ $N: M = 1$.

pro angulo 15° $N: M = \frac{0,517}{0,483} = 1,05$.

Unde differentia $= 0,05 = \frac{1}{20}$. At quivis facile concedet, vitrum maxime esse debere impurum, si lumen, dum in ipso spatium unius lineae pedis parisini percurrit, vigesima sua parte minuatur.

§. 410. Ex dictis ergo abunde elucescit, angulos A, B, C, D &c supra inuentos, ab iis, qui locum habent in casu perfectae pelluciditatis, adeo parum differre, ut si quae adest differentia, haec tam parua sit, quae iure contemni mereatur.

§. 411. Sic quoque pro angulo H assumendo (§. 390. 391.)

$q = 0,03736$ unde $n = 0,96264$

$p = 0,08297$ $m = 0,91703$

inueni

$N: M = 8. (1 + 0,314\%)$

Differentia igitur, quae pro angulo $H = 47^\circ$ inter vitra diuersae pelluciditatis obtinet, prorsus similis est illi quam pro angulo A longe minori inuenimus. Ut adeo tuto ad omnes

N 3

an-

angulos extendatur sententia, eos nempe parum fore diuersos, nisi data opera sumantur vitra ob impuritatem fere opaca.

§. 412. Dubium ergo illud, quod remanere poterat, an anguli *A, B, C, D* &c. quos adhibitis vitris minus pellucidis definiuimus iidem sint, qui prodirent, si vitris perfecte pellucidis uti a natura concessum esset, ita solutum esse censeo, ut iam constet, differentiam, quae inter istos adesse potest, adeo esse exiguam, ut aberrationes, quibus obnoxia sunt experimenta, longe possint esse maiores. Superfluum itaque esse duco, diutius in istam inquirere, cum & pellucidissimis adhibitis vitris, exactius definiri non possint.

§. 413. Experimenta XVtum & XVItum parcius institui, eaque supra (386. seqq.) ita perlustraui, quasi ostendisse sufficeret, quantitates *q, p*, quae per experimenta ista determinantur, intra praefinitos limites cadere (§. 374.) atque ab iis, quae inter limites istos medium tenent (§. 375.) adeo parum discrepare, ut differentia errore, qui in iudicio oculi obtinere potest, minor sit. Rationem, quam ob rem sic egerim, iam supra reddidi (§. 376. 395.) Pluris enim facio quantitates *M, N, P, Q* &c. cum unico experimento eoque faciliiori saepiusque repetito sint definitae. Contra ea quantitates *q, p*, non modo a pluribus experimentis pendent, verum & ipsa haec experimenta incertiora sunt, cum una eademque tabula vitrea non sufficiat, sed ipsi prisma vitreum superaddendum sit. Dubium vero est, an utrique eadem sit vis reflectens.

stens potissimum si puluisculos & bullulas spectes, quae utriusque superficiei diuersa copia inhaerere possunt. Experimentis vero edoctus sum, haud contemnendam hinc emergere posse differentiam. Dedi tamen operam ut in experimentis, quae supra descripsi, differentiam istam, quantum in me erat, minuerem.

§. 414. Porro cuius facile obuium est, quantitates q, p , iam inesse quantitatibus M, N, P, Q &c. exactius definitis. Quodsi ergo quis ex theoria, quam sibi finxit, formulas deducat, quibus definitur ratio inter quantitates q, p , & angulos, sub quibus lumen ex aere in vitrum incidit, facile ipsi erit ope aequationum (§. 349.)

$$N = \frac{1 - q}{1 + p}$$

$$M = \frac{q + p}{1 + p}$$

determinare, an quantitates M, N inueniat esse eas, quas angulis A, B, C, D &c. respondere supra ostendimus.

§. 415. At si unquam defectu quodam laborat theoria luminis, hoc certe casu iste, totus quantus est, sese prodit. Frustra me in perquirendis eiusmodi formulis desudasse, variasque incassum tentasse non inficior. Neque diffiteor, eam, in quam tandem incidi, quamque iam exponam, admodum esse precariam, etsi cum experimentis ita congruat, ut tuto adhiberi possit, donec ea inueniatur, quae vera est. Lectoris igitur arbitrio hypo-

thesin, quam inueni, plane committo, viam tamen, quae ad istam me conduxit, aperiam.

§. 416. Primo quidem *legem continuitatis* non adeo a natura abhorreere assumo, ut reflexio luminis eiusque refraction fieri in instanti censenda sit. Angulum geometrico rigore acutum vel obtusum in rerum natura aut nunquam aut saltem rarissime occurrere facile concessum iri confido. Quodsi enim uspiam huiuscemodi angulus occurrat, necesse esse videtur, ut simul alia quantitas, quae calculum ingreditur euanescat, vel infinite parua euadat. Sic v. gr. in reflexione corporum in obicem proiectorum euanescere pono celeritatem relatiuam, quod vel inde euidentius esse videtur, quod celeritas negatiua euadit.

§. 417. Quatenus lumen in superficiem diaphanam incidens ab ea refringitur, celeritas quidem mutatur, at non euanescit. Hanc vero celeritatis mutationem successiuam esse, admissa lege continuitatis, necessarium est.

Fig. 41. Ut adeo lumen secundum directionem DC in superficiem AB incidens, paullatim a via DC defectat, atque curuam DFE percurrento in medium densius E ingrediatur. Rectae CD, CE erunt curuae istius tangentes.

§. 418. Porro, quod experimentis abunde constat, *reflexio luminis latius patet, quam eius refraction*, id est, dantur casus, quibus lumen omne reflectitur, nullum vero refringitur, at nulli dantur, quibus omne lumen refringeretur.

§. 419. Concipiendum itaque videtur ab utraque parte superficiei media diaphana dirimen-

rimentis AB certum spatium parallelis HI, KL Fig. 42. terminatum, intra quod via luminis CD successiue incuruatur, tandemque emenso isto spatio CFE, per tangentem EG pergat.

§. 420. Eodem modo simile spatium HIKL concipiendum erit, intra quod lumen successiue reflectitur. At vero supra vidimus, reflectionem luminis non deberi particulis heterogeneis siue minus diaphanis, quippe quibus tantum debetur luminis dispersio, sed vim reflectentem ideo adesse, quia adest vis refringens (§. 327. 328. seqq.). An vero utraque ab eadem procedat causa nec ne, liquido nondum constat.

§. 421. Qualescunque autem sint istae vires, eas reuera adesse, nemo facile negabit. Etsi enim plerumque vim reflectentem a refringente ita distinguant, ut hanc ceu maxime realem materiae cuidam tribuant, vel vi corporis attrahenti, quae actu lumen a via sua deflectat, illam vero inertiae cuidam vel resistentiae deberi contendant, hoc tamen perinde erit, quippe & inertiae vim tribui ubique vides, eius saltem eam sustinere vicem in apri-
co est.

§. 422. Eo vero vinculo teneri utramque istam vim, ut una sese exferant, vel inde evidens esse puto, quod utraque & in corporibus perfecte pellucidis adsit (§. 330. 337.) Unde infero, utramque in singulis curvae CFE punctis una adesse.

§. 423. Porro cum corpora perfecte diaphana homogenea esse assumendum sit, ponere licebit, utramque istam vim in eodem stra-

to MN esse constantem, in diuersis vero stratis diuersam. Etsi vero lex ea, qua in singulis stratis intenditur aut remittitur non innotescat, nilominus concedendum erit, utramque istam vim quocunque demum modo pendere ab obliquitate incidentiae. Hoc enim valere de summa luminis a cunctis istis stratis reflexi & refracti, quam supra per literas q, n, p, m expressimus, experimentis in antecedentibus iam est stabilitum, unde idem quoque de singulis stratis seorsim obtinere dubio caret.

§. 424. Simili modo lumen successiue reflectitur & refringitur, dum e medio densiori G in rarius D incidit. At hoc casu quantitas luminis reflexi maior est. Experimentis enim, quibus supra quantitates q, p pro quibusdam saltem angulis definiuimus (§. 386.) constat esse $p > q$. Causa huius phaenomeni plane adhuc latet.

Fig. 43. §. 425. Ut tamen rem tot tantisque tenebris inuolutam nihilominus calculo prosequamur, hunc ita instruemus. Sit ABLC spatium, in quo fit luminis reflexio & refraction. Lumen per EF incidens percurrat curuam FMA, atque deinde pergat per tangentem AI. Quaeritur iam quantitas quae reflectitur, dum percurrit spatiolum Mm.

§. 426. Utcunque vero lumen a recto tramite deflectatur, ratio inter sinus inclinationis & refractionis pro eodem strato constans erit, pro diuersis stratis diuersa assumenda est. (§. 423.) Quo posito, omnes isti sinus ad sinum inclinationis primum HFE constantem seruant rationem, quicunque fuerit angulus inci-

incidentiae EFL. Quod demonstratum dedi
in Tractatu *Les propriétés remarquables de la route
de la lumière par les airs*, superiori anno Hagae Co-
mitum excuso. Referat itaque curua LVM
istam rationem, ut sit

$$\sin HFE : \sin mM\mu = FL : QV$$

Dicatur porro $FL=1$, $QV=z$, $FP=QM=y$,

$FQ=x$, $Qq=dx$, $m\mu=dy$. $HFE=\gamma$, erit

$$\sin mM\mu = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

adeoque

$$\frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = z \cdot \sin \gamma.$$

§. 427. Porro dicatur lumen in F incidens
 $=1$, quod residuum est, dum in M peruenit,
vocetur $=v$, erit quantitas, quae in spatiolo
Mm amittitur $=dv$, quae ergo est definienda.

§. 428. Patet vero eam eo fore maiorem,
quo maior est ipsa quantitas in M incidens v ,
quoque maior est vis reflectens, siue utcunque
eam nominare volueris, resistens, reperiens,
transitum denegans &c. Hanc vim referant
ordinatae QN curuae DB, arque ponamus
 $QN=k$. Erit ergo hoc respectu

$$— dv \propto kv$$

§. 429. Porro utique eo maior est quanti-
tas v , quo maius est spatiolum percursum
Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, unde fiet

$$— dv \propto kv \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

§. 430. At vero quantitas ista quoque pen-
det ab obliquitate incidentiae. Qua autem
ratione hoc respectu minuatur difficillime de-
finietur. Ego quidem ut formulam eruendam
experimentis adcommodare possem, inveni,
quan-

quantitatem istam statuendam esse in ratione reciproca sinus anguli incidentiae $Mm\mu$, siue directe in ratione secantis anguli inclinationis $mM\mu$. Quod si hoc ideo obtinere statuere velis, quod manente radiorum latitudine, numerus obstaculorum crescat ut secans anguli inclinationis, id per me licebit, hypothesein, quam assumis, demonstrare nequeo. Interim ut aequatio eruenda experimentis respondeat, ponemus

$$—dv \propto 1 : \sin Mm\mu.$$

ut tandem fiat

$$—dv = vk \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sin Mm\mu$$

siue ob

$$\sin Mm\mu = dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

euadat

$$\frac{dv}{v} = \frac{k(dx^2 + dy^2)}{dx}$$

§. 431. Sed vidimus esse (§. 426.)

$$\frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = z \sin \gamma.$$

Unde substitutione facta prodit

$$\frac{dv}{v} = \frac{kdx}{1 - zz \sin^2 \gamma}$$

Quae aequatio facili substitutione facta abit in sequentem

$$\frac{dv}{v} = \frac{kdx \cdot \operatorname{cosec} \gamma^2}{\cot \gamma^2 + (1 - zz)}$$

siue ponendo breuitatis ergo $1 - zz = \zeta\zeta$, resoluetur in seriem

$$\frac{dv}{v} = \frac{kdx}{\sin \gamma^2} \left[\operatorname{tang} \gamma^2 - \zeta^2 \cdot \operatorname{tang} \gamma^4 + \zeta^4 \operatorname{tang} \gamma^6 - \&c. \right]$$

Unde

Unde tandem habetur

$$\log \frac{1}{v} = \sec \gamma^2 \int k dx - \sec \gamma^2 \tan \gamma^2 \int k z^2 dx + \&c.$$

§. 432. Integralia, quae in singulis terminis huius seriei occurrunt, ab angulo inclinationis γ non pendent, singulaque per functionem ipsius x efferri poterunt, quippe per x utraque variabilis k & z est exprimenda. Quodsi ergo iam quaeratur lumen omne reflexum, ponenda erit $x = FG$, atque patet singula ista integralia instar coefficientium haberi posse, cum sumendum sit spatium $\int k dx$, $\int k (1 - zz) dx$, $\int k (1 - zz)^2 dx$, &c quod integration instituta ipsi $x = FG$ respondet. Sic. v. gr. erit $\int k dx =$ spatium $FGBD$, & similia reperientur pro ceteris integratibus.

§. 433. Dicto ergo spatio

$$\int k dx = \alpha$$

$$\int k (1 - zz) dx = \epsilon$$

$$\int k (1 - zz)^2 dx = \delta$$

&c,

erit

$$\log \frac{1}{v} = \sec \gamma^2 [\alpha - \epsilon \tan \gamma^2 + \delta \tan^2 \gamma^2 - \&c]$$

§. 434. Huius seriei coefficientes $\epsilon, \delta, \epsilon$ &c. valde decrescunt. Etenim abscissa z cum minima est in G , pro vitro adhuc est $= \frac{2}{3}$, unde $1 - zz$ erit fractio dimidia parte unitatis fere semper minor. Alia porro convergentiae est ratio, simul ac angulus γ fuerit semirecto minor. Tunc enim erit $\tan \gamma < 1$. Hinc fit ut termini primum sequentes plerumque abiici possint, ut adeo tantum remaneat

$$- \log v = \alpha \sec \gamma^2.$$

Ad

Ad hanc aequationem absolute reducitur series inuenta simulac lumen normaliter incidat. Hoc enim casu erit $\tan \gamma = 0$; cumque etiam sit $\sec \gamma = 1$, erit breuissime

$$-\log v = \alpha.$$

§. 435. Iisdem insistendo vestigiis similem formulam habebis pro lumine reflexo, cum e medio densiore I in rarius E incidit. Cum vero hoc casu vis reflectens, siue quantitas luminis reflexi sit maior, patet, curuam DNB non esse eandem. Unde prodibit series, quam quidem ingreditur secans γ , at diuersi erunt coefficientes.

§. 436. Quodsi via percurfa AF statuatur rectilinea, siue quod idem est, si ponamus, quod NEWTONO magis arridet, lumen reflecti antequam refringatur, faciendum erit $z = 1$, adeoque $1 - z^2 = 0$. Quo facto in serie prima (§. 433.) omnes termini primum sequentes erunt $= 0$, ut adeo simpliciter sit

$$-\log v = \alpha (\sec \gamma)^2$$

§. 437. At in serie altera (§. 435.) minus commode adhibebitur $\sec \gamma$, cum ipsi substituenda videatur secans anguli inclinationis radii IA. Haec vero substitutio experimentis minus satisfacit, si eadem formula sit retinenda.

§. 438. Cum vero tota ista hypothesis admodum sit precaria, in eam diutius inquirere superfluum duxi. Quare seriei §. 433. terminum primum eundemque solum retinendo posui esse

$$-\log v = \alpha \sec \gamma^2 = -\log(1 - q)$$

& pro lumine e vitro in aerem incidente similiter assumfi

$$-\log v = \alpha \sec \gamma^2 = -\log (1-p)$$

Quo facto, utramque hanc aequationem cum experimentis supra traditis comparavi, ut determinarentur coefficientes α , α , atque inueni, adhibendo logarithmos Briggsianos, faciendum esse

$$\log(1-q) = -0,0087214(\sec.\gamma)^2$$

$$\log(1-p) = -0,0199966(\sec.\gamma)^2$$

§. 439. Antequam has aequationes cum experimentis conferamus, sequentia notasse conuenit. Ponamus seriem (§. 433.)

$$-\log v = \log \frac{1}{1-q} = \sec \gamma^2 (\alpha - 6 \tan \gamma^2 + 8 \tan \gamma^3 - \&c.)$$

cum ipsa rei natura congruere, euidens est, abiectis terminis primum sequentibus inueniri

$$\log \frac{1}{1-q} \text{ debito maiorem. Unde inuenitur } q$$

debito maior. Similique modo prodibit p debito maior. Cum vero sit (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

auctus erit fractionis huius numerator & denominator, at posterior minori ratione augeatur, unde quoque per aequationes

$$\log \frac{1}{1-q} = \alpha \sec \gamma^2$$

$$\log \frac{1}{1-p} = \alpha \sec \gamma^2$$

pro-

prodibit quantitas M , quae debito maior est. Porro maior erit iste excessus, quo maior est angulus γ .

§. 440. Haec obtinent, cum coefficientis α is esse ponitur, qui reuera esse debet. Quod si vero ita assumatur, ut formula experimento conueniat, utique debito minor erit. Unde & quantitates q, p, M pro ceteris experimentis siue angulis ex formula deducendae, debito erunt minores, iis tantum casibus exceptis, quibus angulus γ ab angulo recto parum differt. His enim casibus $\tan \gamma$ sinu toto vel unitate multoties maior est. Unde omittis terminis seriei secundum sequentibus, praecipue vero secundo, omittitur quantitas negativa haud sane contemnenda, ut adeo quantitates q, p, M , nihilominus iterum debito euadant maiores, etsi coefficientes assumpti α, α debito sint minores.

§. 441. En ergo anomalias, quae in aequationibus

$$\log(1-q) = -0,0087214.(\sec \gamma)^2$$

$$\log(1-p) = -0,0199966.(\sec \gamma)^2$$

occurrere debent, si vera fuerit series ex assumpta hypothesis eruta.

§. 442. Ut iam utramque hanc aequationem cum experimentis conferre possem, sumsi complementa angulorum A, B, C, D &c. (§. 379.) sub quibus inuenimus esse $M = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ &c. (§. 380.) ut totidem haberem angulos inclinationis γ , horumque ope inuenirem $\log(1-q)$, & $\log(1-p)$ atque proinde ipsas quan-

quantitates q, p angulis istis respondentes. His in formula (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1-p}$$

substitutis, elicui quantitates M , quas cum observatis tutissime conferri posse supra monui. (§. 414.) Hinc tandem sequens nata est tabella.

Ex observ.		Ex Calculo			Ex observ.	Differentia
Anguli incid.		q	p	M	M	
A	$14\frac{1}{2}^{\circ}$	0,2741	0,5136	0,5205	0,5000	+ 0,0205
B	22	0,1333	0,2753	0,3204	0,3333	— 0,0130
C	27	0,0928	0,1968	0,2421	0,2500	— 0,0079
D	31	0,0729	0,1566	0,1985	0,2000	— 0,0015
E	35	0,0592	0,1283	0,1663	0,1667	— 0,0004
F	39	0,0494	0,1078	0,1428	0,1429	— 0,0001
G	43	0,0423	0,0925	0,1234	0,1250	— 0,0016
H	47	0,0368	0,0810	0,1091	0,1111	— 0,0020
I	$50\frac{1}{2}$	0,0332	0,0731	0,0991	0,1000	— 0,0009

§. 443. An ergo differentiae, quas exhibet haec tabella cum praefinitis earum symptomatibus conspirent (§. 439. 440.) singulaeque ob parvitatem contemni mereantur, quivis facillime diiudicabit. Porro pro singulis denis gradibus ex aequationibus istis quaesivi quantitates q, p, M, N , quas sequens tabella exhibet

O

Ang.

Ang. incid.	q	p	M	N
10°	0,4862	0,7766	0,7108	0,2892
20	0,1578	0,3204	0,3622	0,6378
30	0,0772	0,1653	0,2070	0,7930
40	0,0474	0,1046	0,1376	0,8624
50	0,0337	0,0705	0,0973	0,9027
60	0,0264	0,0585	0,0802	0,9198
70	0,0225	0,0499	0,0690	0,9310
80	0,0203	0,0450	0,0624	0,9376
90	0,0199	0,0448	0,0619	0,9381

Unde videmus lumen q sub angulo recto a superficie vitri exteriori reflexum esse $= 0,0199$ siue quinquagesimam partem luminis incidentis. Quodsi vero lumen e vitro normaliter incidat in aerem, erit quantitas luminis ab interiore vitri superficie reflexi $p = 0,0448$, siue $\frac{1}{22}$ luminis incidentis.

§. 444. His ita assumtis facile dabitur lumen a pluribus planis vitreis iisdemque perfecte pellucidis sub quolibet angulo incidentiae transmissum & reflexum. Dicto enim vitrorum numero $= x$, erit ut supra viderimus (§. 359).

$$\text{lumen reflexum} = X = \frac{xM}{1 + (x-1)M}$$

$$\text{transmissum} = Y = \frac{N}{1 - (x-1)N}$$

Sic

Sic v. gr. pro angulo incidentiae recto, est
 $M = 0,0619$. unde fit

$$X = \frac{x}{15,1535 + x} = 1 - Y$$

Eritque lumen

a vitris reflexum X refractum Y

1 - - - -	0,0619 - - - -	0,9381
2 - - - -	0,1166 - - - -	0,8834
3 - - - -	0,1652 - - - -	0,8348
4 - - - -	0,2088 - - - -	0,7912
5 - - - -	0,2481 - - - -	0,7519
6 - - - -	0,2836 - - - -	0,7164
7 - - - -	0,3158 - - - -	0,6842
8 - - - -	0,3455 - - - -	0,6545
&c	&c	&c

§. 445. Utique hae quantitates, quae vitris perfecte pellucidis respondent, longe ab iis sunt diuersae, quae prodibunt si vitra adhibeantur qualia reipsa sunt, minus nempe pellucida. Sequeretur enim inde, lumen per 15 vitra transmissum, vix ad dimidiam partem incidentis reduci. Videbimus vero infra duo vitra mediocriter pellucida huic decremento producendo iam sufficere. Ut adeo evidens sit, quantum detrimenti patiatur lumen a particulis, a quibus in omnes partes dispergitur.

CAPVT II.

Instaurantur experimenta & calculus pro tabulis vitreis minus diaphanis.

§. 446. *V*aria iam in superiori Capite occurrunt, quae ad mensuram luminis a vitris minus pellucidis transmissi & reflexi faciunt, quaeque hic, ne bis idem repetendum sit, veluti in summam contrahemus.

1°. Vidimus vitra minus pellucida, quatenus perfecte pellucidis opponuntur, non ea esse, quae partem luminis reflectunt, quippe hoc omnibus commune est, verum ea tantum minus diaphana esse vocanda, quae lumen plus minusue dispergunt, intercipiunt, absorbent. (§. 320. seqq. §. 328. seqq. §. 332. seqq.)

2°. Ut porro in casu perfectae pellucidatis vidimus esse $M + N = 1$, siue lumen reflexum & refractum iunctim sumtum aequale esse incidenti; ita contra ponendum erit $M + N < 1$, simulac vitrum minus fuerit diaphanum. Hoc enim casu pars quaedam luminis incidentis dispergitur & absorbetur.

3°. Similiter vidimus, quantitates q, p , quae lumen a superficie vitri exteriori & interiore reflexum referunt, a pelluciditate vitri non pendere (§. 328. seqq.) nisi in ista superficie adsint puluisculi & bullulae lumen intercipientes & dispergentes (§. 323. 413.) Hoc enim casu, quantitates

$q, n,$

q, n, p, m minores evadunt, quam forent, si obstacula ista abessent.

§. 447. Singuli isti vitrorum defectus calculum reddunt prolixissimum. Contra ea experimenta facilia sunt. Cum enim vitra minus pellucida actu dentur, iis cautelis non opus erit, quibus in praecedentibus utendum fuit, ut ab his vitris ad ea concludere liceret, quae perfecte pellucida esse ponuntur.

§. 448. A calculo ut ordiamur, ad §. 354. & seqq. retrogrediemur, atque recordabimur independentem a vitri pelluciditate esse (§. 357. 358.)

$$\lambda = \varrho + \frac{v\varpi}{1 - \varpi\varrho}$$

$$\kappa = \frac{v\mu}{1 - \varpi\varrho}$$

At iam pro vitris minus pellucidis est $\varrho + v < 1$, $\varpi + \mu < 1$, unde & $P + Q < 1$, $R + S < 1$, $T + V < 1$ &c. (§. 359.)

Relicto iam, ut supra fecimus (§. 359.) in E Fig. 36. unico vitro, in B successive ponantur c, 1, 2, 3, 4 &c. . . . (x - 1), ut numerus cunctorum sit, 1, 2, 3, 4. . . . x. erit

$$\varpi = M$$

$$\mu = N$$

atque ponendo successive

$$\varrho = M, P, R, T, \&c.$$

$$v = N, Q, S, V, \&c.$$

substitutione in aequationibus §. 448. facta prodibunt valores λ, μ , vitris 1, 2, 3, 4 &c. debiti, quos sequens sistit tabella, facile ulterius continuanda. Erit nempe lumen

a vitris	reflexum	refractum
1 - -	$M = M$	$N = N$
2 - -	$P = M + \frac{NNM}{1-MM}$	$Q = \frac{N^2}{1-M^2}$
3 - -	$R = P + \frac{Q^2M}{1-MP}$	$S = \frac{QN}{1-MP}$
4 - -	$T = S + \frac{S^2M}{1-MR}$	$V = \frac{SN}{1-MR}$
5 - -	$W = T + \frac{V^2M}{1-MT}$	$X = \frac{VN}{1-MT}$
&c.	&c.	&c.

§. 449, Formulae istae facili substitutione
abunt in sequentes, ut sit

$$N = N$$

$$Q = N \cdot \frac{N}{1-M^2}$$

$$S = N \cdot \frac{N}{1-M^2} \cdot \frac{N}{1-MP}$$

$$V = N \cdot \frac{N}{1-M^2} \cdot \frac{N}{1-MP} \cdot \frac{N}{1-MR}$$

&c.

similiterque

$$M = M$$

$$P = M + \frac{N^2M}{1-M^2}$$

$$R = M + \frac{N^2M}{1-M^2} + \frac{Q^2M}{1-MP}$$

$$T = M + \frac{N^2M}{1-MM} + \frac{Q^2M}{1-MP} + \frac{S^2M}{1-MR}$$

&c.

At

At vero utcunque mutantur, formulae priores sequentibus ita inhaerent, ut difficulter detur formula generalis, lumen per numerum vitrorum indefinitum refractum & reflexum sistens. Hanc ergo cum directe inde non posse deduci viderem, per ambages quaesiui, sequentem adhibens methodum, quae plurimis aliis quoque casibus cum emolumento adhiberi poterit.

§. 450. Resumendo aequationes universales

$$\lambda = \varrho + \frac{v\varpi}{1 - \varpi\varrho}$$

$$\kappa = \frac{v\mu}{1 - \varpi\varrho}$$

numerum vitrorum superius positorum sumsi esse aequalem numero eorum, quae inferius collocata sunt, huncque numerum feci $= x$. Unde obtinui

$$\varpi = \varrho$$

$$v = \mu$$

atque hinc porro lumen a $2x$ vitris

$$\text{reflexum } \lambda = \varrho + \frac{\mu\mu\varrho}{1 - \varrho\varrho}$$

$$\text{refractum } \kappa = \frac{\mu\mu}{1 - \varrho\varrho}$$

$$\lambda = \varrho + \varrho\kappa = \varrho(1 + \kappa)$$

His ergo formulis, quod hic obiter notamus, facile & quasi per saltum, dato lumine ab x vitris reflexo & refracto, dabitur illud, quod a $2x$, $4x$, $8x$, $16x$ &c vitris reflectitur & refringitur. At uniuersaliter res est absoluenda.

§. 451. Facile vero obuium est, problema, quod hic soluendum est, uniuersalissime sic sonare.

Data ratione, quam inter se seruant ordinatae cuiusdam curuae, abscissae simplae & duplae respondentes, inuenire aequationem ad istam curuam siue generalius.

Data ratione inter ordinatas abscissis datam quoque inter se rationem seruantibus respondentes inuenire aequationem inter abscissam quamlibet & respondentem ipsi applicatam. Huius Problematis exemplum dedi in *Actis Helueticis Tom. III.* methodum ostensurus aequationem inter arcum & sinum absque calculi infinitesimalis adminiculo ex ea ratione deducendi, quam inter se seruant sinus arcus simpli & dupli. Similia quoque exempla supra occurrunt Cap. III. P. I.

§. 452. Quaeruntur vero hic valores ϱ & μ per x exprimendi. Quare fiat

$$\varrho = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

$$\mu = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

atque euidens est prodire λ & κ , si pro x substituatur $2x$, ut sit

$$\lambda = A + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + \&c.$$

$$\kappa = a + 2bx + 4cx^2 + 8dx^3 + \&c.$$

§. 453. Substitutis iam his seriebus in formulis (§. 450.)

$$\lambda = \varrho(1 + \mu)$$

$$\kappa = \mu\mu: (1 - \varrho\varrho)$$

siue

$$\mu\mu = \kappa(1 - \varrho\varrho)$$

atque binis seriebus inter se collatis, aequari poterunt coefficientes terminorum homologorum, ut adeo hoc modo coefficientes isti innotescant.

§. 454. Calculo vero actū instituto inueni, faciendum esse $A = 0$, unde porro $a = 1$. coefficientes B, b manere indeterminatos, atque per hos expressum iri ceteros, ut sit

$$C = bB$$

$$D = \frac{2b^2B + B^3}{3}$$

$$E = \frac{b^3B + 2B^3b}{3}$$

$$F = \frac{2b^4B + 11b^2B^3 + 2B^5}{15}$$

$$G = \frac{b^5B + 26b^3B^3 + 17bB^5}{45}$$

$$H = \frac{4b^6B + 114b^4B^3 + 180b^2B^5 + 17B^7}{315}$$

&c.

Similiter

$$c = \frac{b^2 + B^2}{2}$$

$$d = \frac{b^3 + 5bB^2}{6}$$

$$e = \frac{b^4 + 18b^2B^2 + 5B^4}{24}$$

$$f = \frac{b^5 + 58b^3B^2 + 61B^4b}{120}$$

$$g = \frac{b^6 + 179b^4B^2 + 479b^2B^4 + 61B^6}{720}$$

$$h = \frac{b^7 + 543b^5B^2 + 3111b^3B^4 + 1385bB^6}{5040}$$

&c.

O 5

§. 455.

§. 455. Erit ergo lumen ab x vitris
reflexum

$$\rho = Bx + bBx^2 + \frac{2b^2B}{3} + \frac{B^3x^3}{3} + b^3B + \frac{2bB^3x^4}{3} +$$

$$\frac{2b^4B + 11b^2B^3 + 2B^5x^5}{15} + \&c.$$

refractum

$$\mu = 1 + bx + \frac{b^2}{2} + \frac{B^2x^2}{6} + \frac{b^3}{6} + \frac{5bB^2x^3}{6} +$$

$$\frac{b^4 + 18b^2B^2 + 5B^4x^4}{24} + \frac{b^5 + 58b^3B^2 + 61bB^4x^5}{120} + \&c.$$

Unde lumen dispersum vel amissum

$$1 - \rho - \mu = \frac{(B+b)x + (B+b)^2x^2}{2}$$

$$+ \frac{(b+B)^2(b+2B)x^3}{2.3} +$$

$$\frac{(b+B)^3(b+5B)x^4}{2.3.4} + \frac{(b+B)^3(b^2+13bB+16B^2)x^5}{2.3.4.5} +$$

$$\frac{(b+B)^4(b^2+28bB+61B^2)x^6}{2.3.4.5.6} +$$

$$\frac{(b+B)^4(b^3+60b^2B+297bB^2+272B^3)x^7}{2.3.4.5.6.7} +$$

$$\frac{(b+B)^5(b^3+123b^2B+1011bB^2+1385B^3)x^8}{2.3.4.5.6.7.8} +$$

$$+ \&c.$$

§ 46. Constantes b , B , quae his seriebus
insunt, experimentis determinantur, quippe
pendent a vitrorum impelluciditate. Hoc

tan-

tantum notabimus, quod b sit negatiua, quippe μ non potest esse > 1 .

§. 457. Series istae mirum in modum contrahuntur, si vitra ponantur perfecte pellucida. Hoc enim casu erit $b = -B$. unde

$$\rho = Bx - B^2x^2 + B^3x^3 - \&c = \frac{Bx}{1+Bx}$$

$$\mu = 1 - Bx + B^2x^2 - B^3x^3 + \&c = \frac{1}{1+Bx}$$

Quodsi utraque haec formula cum iis comparatur, quas supra pro casu perfectae pelluciditatis inuenimus (§. 359) patebit hoc casu esse

$$B = -b = \frac{M}{1-M} = \frac{M}{N}$$

Hoc vero compendio pro vitris minus pellucidis uti non licet.

§. 458. Ut iam determinetur quantitas luminis dispersi, quaerendi erunt valores M, N , quales sunt in vitris minus pellucidis, sub angulis incidentiae quibuscunque. Quem in finem experimentum XII. (§. 352.) ita immutauimus.

EXPERIMENTVM XVII.

§. 459. Chartae albae AC verticaliter imposui tabulam vitream AB, in quam lumen incidere oblique secundum directionem parallelam IE, MC, atque refractum a charta in CE exciperetur. Porro aliam tabulam vitream ad sensum aequae pellucidam CD in C ita inclinaui, ut lumen secundum eandem directionem LD, MC incidens ab ea in idem spatium CE

Fig. 44.

CE reflecteretur, atque hoc spatium CE ab utroque lumine refracto & reflexo aequè collustraretur, ac aliud chartae spatium a lumine directo illuminatum. Quo facto dimensus sum angulos incidentiae & reflexionis, invenique fuisse

$$MCA = 49^\circ.$$

$$\text{unde ob } BAC = 90$$

$$\text{erat } CBA = 41.$$

$$\text{porro } DCE = 74\frac{1}{2}$$

$$\text{unde } MCD = 25\frac{1}{2} = DCE - MCA = CDE,$$

$$DEC = 80 = 180^\circ - DCE - CDE.$$

Erat ergo angulus incidentiae luminis directi & refracti in chartam CE = 49° , luminis reflexi in eandem chartam = 80° . Angulus incidentiae luminis in tabulam AB = 41° , in tabulam CD = $25\frac{1}{2}^\circ$.

§. 460. Facile iam hinc inueniri poterit summa luminis in utroque vitro amissi. Quaerenda enim erit summa luminis, quod in spatium CE sub iisdem angulis refringeretur & reflecteretur in casu perfectae pelluciditatis. Erit autem pro vitro AB ob angulum incidentiae = 41° . (§. 438. seqq.)

$$q = 0,0456 \quad p = 0,0997$$

$$M = 0,1296 \quad N = 0,8704$$

Sed lumen refractum N in chartam incidit sub angulo 49° . adeoque debilitatur illuminatio ut sinus huius anguli, qui est = 0,7547. Quare illuminatio vitro AB debita in casu perfectae transparentiae fuisset = (0,8704). (0,7547). = 0,6569.

§. 461.

§. 461. Porro cum lumen in vitrum CD incidat sub angulo $25\frac{1}{2}$, reperitur pro casu perfectae pelluciditatis

$$q = 0,1027$$

$$p = 0,2164$$

$$M = 0,2623$$

$$N = 0,7377$$

At lumen reflexum M in chartam incidit sub angulo 80° , unde debilitatur illuminatio ipsi debita in ratione sinus huius anguli, qui est $= 0,9848$. Erit ergo illuminatio vitro CD debita $= (0,2623) \cdot (0,9848) = 0,2587$.

§. 462. Cum ergo in casu perfectae pelluciditatis sit illuminatio chartae quae debetur

$$\text{lumini refracto} = 0,6569$$

$$\text{reflexo} = \underline{0,2587}$$

$$\text{Erit utriusque summa} = 0,9156$$

Haec vero deberet esse aequalis illuminationi, quae provenit a lumine directe incidente. Quod cum incidat sub angulo 49° , debilitatur ut sinus huius anguli, eritque ergo $= 0,7547$. Huic claritati claritas spatii CE in experimento re ipsa est aequalis. Quare lumen quod in casu perfectae pelluciditatis esset $= 0,9156$. adhibitis vitris minus pellucidis tantum fuit $= 0,7547$. Ut adeo debilitatum sit in ratione $(0,9156) : (0,7547) = 1 : 0,8233$ proxime $= 14 : 17$, ut adeo $\frac{3}{7}$ amittatur.

§. 463. Quantitas haec amissa utique admodum est notabilis, quod inde provenit, quod vitrum sumsi admodum viride, quale ad conficienda specula minora viliorisque pretii adhibent. Cum vero quaelibet fere vitra diuersa gaudeant pelluciditate, facile patet eiusmodi experimenta nequam uniuersalia esse
atque

atque quantitates similibus experimentis definitas parui usus esse, cum aliis adhibitis vitris aliae prodeant. Cum vero utique methodus, qua definitur, hic sit exponenda, ea usus sum cautela, ut singula experimenta iisdem vitris instituerem. Alias enim dubium an regulae, quas hic tradam, sibi constant nec ne, experimentis solui non posset.

§. 464. Debilitatio luminis, quam ex ultimo experimento deduximus, utrique vitro debetur. Cumque anguli incidentiae sint diuersi, determinari nequit, quid alterutri soli debeatur, nisi prius definiamus, *qua ratione debilitatio luminis ab obliquitate incidentiae pendeat*. Huius ergo problematis solutionem tentabimus sequentem.

§. 465. Resumamus itaque aequationes

$$M = q + \frac{nm p \lambda^2}{1 - p^2 \lambda^2}$$

$$N = \frac{nm \lambda}{1 - p^2 \lambda^2}$$

Fig. 34. quas supra (§. 403.) pro vitris minus pellucidis eruimus. Vidimus vero decrementum, quod lumen patitur a minori vitrorum pelluciditate, pendere a ratione $1 : \lambda$, in qua debilitatur, dum in vitro rectarum BC, CD, DE &c. quamlibet percurrit. Haec ergo ratio pro singulis angulis incidentiae est determinanda.

§. 466. Quod ut fiat, vitra, quantumvis impura fuerint, eatenus tamen in singulis suis partibus homogeneorum naturam affectare assumendum est, ut particulae lumen interceptien-

cupientes aequae in ipsis sint disseminatae. Quod nisi fuerit, aut assumenda erit lex quaedam, ad quam earum disseminatio sese componit, aut ab omni calculo animus erit abstrahendus. Cumque porro calculus, quem hic instruemus quibuscunque aliis diaphanis adplicari possit, rem uniuersaliter concipere e re erit.

§. 467. Sit ergo corpus minus diaphanum quodlibet, ita tamen comparatum, ut in singulis eius partibus particulae lumen intercipientes aequae sint sparsae. Lumen istud ingrediatur, huiusque densitas initialis siue in ingressu sit 1. Percursu spatio $= x$, ita debilitatum esse statuatur ut iam sit $= v$; atque evidens est, lumen spatiolum dx percurrente, iacturam radiorum facere, quae est $= -dv$. Hanc iacturam eo maiorem statuere licet, quo maior sit luminis in obstacula ista incurrentis quantitas & densitas, quoque maius fuerit spatiolum percursum. Unde erit

$$dv = vdx : 7$$

siue integrando

$$\log \frac{1}{v} = x7$$

Decrescit ergo lumen ut ordinatae logisticae, cuius subtangens est $= q$ abscissae vero sunt ipsa via x a lumine percursa.

§. 468. Hunc calculum eodem modo absoluit Cel. BOVGVER in tractatu supra laudato (§. 315.) sumtisque experimentis inuenit subtangentem q pro aqua marina esse $= 115$ digitis pedis parisiini, ita ut lumen in aqua marina hoc spatium percurrente debilitetur in ratione ordinatarum logisticae longitudine sub-

subtangente ab invicem distantes, adeoque $\approx (2,71828\dots)$: 1 siue proxime $\approx 19:7$ siue fere $\approx 8:3$. Ita vero experimentum instituit acutissimus vir, ut lumen per duo vitra, quibus inclusa erat aqua, transiret. Neque video quo modo aliter res peragi possit. At vero hoc ipso lumen debito nimis debilitatur, cum non modo pars eius ab utraque vitrorum & aquae superficie, in quam incidit lumen, reflectatur, verum & in ipsis vitris alia pars eaque minus adhuc contemnenda dispergatur. Hoc vero decrementum, quod hic plane est alienum, in calculum, non induxit. Unde hoc certe respectu longitudo subtangente repertae utique maior esse debet, etsi iam qualis est, longe nimia esse videatur. Experimentum vero ita est comparatum, ut circumstantiae alienae, quaeque & luminis quantitatem magis quam optandum esset, alterant, iudiciumque oculi, ob viridem luminis aquam permeantis colorem, reddunt incertius, arceri saltem omnes nequeant. Hanc vero ob causam ab eo animum abstrahendum esse censui.

§- 469. Cum itaque sit

$$\log \frac{1}{v} = x:7$$

siue ponendo $\log e = 1,$
 $-x:7$

$$v = e$$

valor

valor hic in formulis (§. 465.)

$$M = q + \frac{mnp\lambda^2}{1 - p^2\lambda^2}$$

$$N = \frac{mnl}{1 - p^2\lambda^2}$$

erit substituendus. Patet vero esse debere $\lambda = \lambda$, atque viam percurfam x in vitro esse $= BC = CD = DE = \&c.$ adeoque per leges refractionis $x = PQ : \sqrt{(1 - \frac{4}{9}(\cos ABP)^2)}$ Fig 34.

§. 470. Dicatur ergo crassities vitri $PQ = c$, angulus incidentiae $ABP = G$, atque erit

$$x = 3c : \sqrt{(5 + 4 \sin^2 G)}$$

Unde porro substitutione facta

$$M = q + \frac{mnp e^{-2x:7}}{1 - ppe^{-2x:7}}$$

$$N = \frac{mne^{-x:7}}{1 - ppe^{-x:7}}$$

sive

$$M = q + \frac{mnp}{e^{2x:7} - pp}$$

$$N = \frac{mne^{x:7}}{e^{2x:7} - pp}$$

§. 471. At in ultimo experimento (§. 469. Fig. 44. seqq.) habuimus angulum incidentiae luminis

in D

in B

$$g = 25\frac{1}{2}$$

$$g = 41.9$$

$$\text{Unde est} \dots x = 1,257.c$$

$$x = 1,157.c$$

$$\text{atque} \dots q = 0,1027$$

$$q = 0,0456.$$

$$p = 0,2164$$

$$p = 0,0997.$$

$$\text{hinc} \dots n = 0,8973$$

$$n = 0,9544$$

$$m = 0,7836$$

$$m = 0,9003$$

Unde porro erit lumen a vitro CD reflexum,

$$M = 0,1027 + \frac{(0,2164) \cdot (0,8973) \cdot (0,7836)}{2,504.c:7}$$

refractum a vitro AB

$$N = \frac{(0,9544) \cdot (0,9003)e}{2,304.c:7}$$

$$e - (0,2164)^2$$

Sed ob obliquitatem incidentiae in chartam, debilitatur M ut $\sin 8^\circ = 0,9877$. & N ut $\sin 49^\circ = 0,7547$. Utriusque vero hac ratione debilitati summa debet esse = lumini directe incidenti = $0,7547$ (§. 462.) Unde fiet.

$$(0,9877) M + (0,7547) N = 0,7547.$$

Quodsi ergo in hac aequatione substituantur valores M, N ante reperti, debita facta reductione prodit

$$\frac{1,157.c:7}{2,314.c:7} + \frac{0,23175}{2,504.c:7} = 1,0074.$$

$$-0,0100$$

$$-0,04683.$$

§. 472.

§. 472. Huic aequationi satisfacere inueni quantitatem

$$c:7=2:13.$$

Quo enim valore substituto, prodit lumen

$$\text{reflexum} = 0,2057.$$

$$\text{refractum} = 0,5466$$

$$\text{Summa} = 0,7523.$$

$$\text{Quae deberet esse} = 0,7547.$$

$$\text{differt ergo } 0,0024.$$

Quae differentia cum sit contemnenda, patet tuto pro iis vitris, quibus usus sum, quaeque & in experimentis sequentibus adhibui, fieri posse

$$\frac{c}{7} = \frac{1}{13}$$

§. 473. Sub angulo incidentiae recto est

$$x=c$$

$$q=0,0199$$

$$n=0,9801.$$

$$p=0,0448$$

$$m=0,9552.$$

Unde habetur

$$M=0,0516$$

$$N=0,8111.$$

$$\text{Quare } M+N=0,8627=1-0,1373$$

$$\text{Amittitur ergo pars } = 0,1373 \text{ siue } = \frac{3}{22}.$$

§. 474. His valoribus in formulis (§. 448. 450.) substitutis, reperitur lumen sub angulo recto

a vitris	reflexum	refractum	amissum
----------	----------	-----------	---------

1 . .	0,0516 . .	0,8111 . .	0,1373.
-------	------------	------------	---------

2 . .	0,0856 . .	0,6596 . .	0,2548.
-------	------------	------------	---------

3 . .	0,1081 . .	0,5368 . .	0,3551.
-------	------------	------------	---------

4 . .	0,1228 . .	0,4377 . .	0,4495.
-------	------------	------------	---------

8 . .	0,1467 . .	0,1945 . .	0,6588.
-------	------------	------------	---------

16	- -	0,1524	- -	0,0387	- -	0,8089.
32	- -	0,1526	- -	0,0016	- -	0,8458.
&c.		&c.		&c.		&c.

§. 475. Quodsi haec tabella cum tabella (§. 444) conferatur, patebit quantum detrimenti lumen capiat a minori vitrorum pelluciditate. Impellucidiora adhuc hisce quibus usus sum, adhibuisse Cel. BOVGVER vel inde patet, quod lumen a duobus vitris refractum iam debilitari videbat in ratione 1 ad $\frac{1}{2}$. At, quod vel ex tabella patet, in nostra experimento haec ratio vix est $= 1 : \frac{2}{3}$. Quod hic monemus ob dicta in §. 468.

§. 476. Definito valore ipsius $c:7$ per experimentum posterius, dabuntur quantitates M, N, P, Q, R, S , &c. pro quotlibet vitris & quibuscumque angulis incidentiae, etsi calculus haud parum sit operosus, & prolixus. Ut vero & aliis experimentis firmentur formulae (§. 470.) supra erutae, rem ita sum adgressus.

EXPERIMENTVM XVIII.

Fig. 45. §. 477. Tabulam vitream AB chartae albae AE impositam ad hanc utcunque inclinaui, ut lumen secundum directionem rectae BD parallelam incidens atque per vitrum AB transiens collustraret chartae spatium AD. Porro duas alias tabulas vitreas iuxta primam collocavi in AC, easque ita inclinaui, ut lumen utramque sub eadem directione BD, CE transiens illuminaret spatium chartae priori fere contiguum, quod referat recta AE, utque utrumque hoc spatium aequè videretur illuminatum. Quo facto dimensus sum angulos DBA,

DBA, ECA, qui aequales sunt illis sub quibus lumen in vitra AB, AC incidebat. Experimentum alternatis angulis incidentiae instauravi inuenique sibi respondisse

Ang. ACE	Ang. ABD	Ang. ACE	Ang. ABD
1° - - 15° - - 9°	6 - - 48 - - - 24 $\frac{1}{2}$		
2° - - 20 - - - 12 $\frac{1}{2}$	7 - - 58 - - - 28		
3° - - 22 $\frac{1}{2}$ - - - 13 $\frac{1}{2}$	8 - - 80 - - - 29 $\frac{1}{2}$		
4° - - 32 $\frac{1}{2}$ - - - 18	9 - - 90 - - - 30.		
5° - - 42 - - - 22			

§. 478. His angulis cum methodus supra descripta (§. 396. seqq.) longe facilius adplicari possit, priores ACE spectauit ceu abscissas, posteriores ABD ceu ordinatas respondentes cuiusdam curuae, qua constructa, inueni eos parum a lege homogeneorum aberrare, unde medio sumto ut supra (§. cit.) inueni sibi congruere

Ang. ACE	Ang. ABD
10° - - - - - 6	
20 - - - - - 12	
30 - - - - - 17	
40 - - - - - 21	
50 - - - - - 25	
60 - - - - - 28	
70 - - - - - 29	
80 - - - - - 29½	
90 - - - - - 30	

§. 479. Porro his angulis ita adcommodaui calculum. Pro angulis ABD per formulas §. 470. quasiui lumen refractum *N* ipsis respondens; similique modo adhibendo easdem formulas una cum iis quas dedi in §. 448. de-

terminavi lumen per duo vitra refractum Q angulis incidentiae ACE debitum atque inueni fuisse proxime $Q = N$. Hoc vero cum esse debeat, inferre licet, formulas supra erutas cum experimentis congruere.

§. 480. Sic v. gr. Sumsi in exper. 6to angulum $ACE = 48^\circ$, & respondentem ipsi angulum $ABD = 24\frac{1}{2}^\circ$, atque calculo subducto prodire inueni, pro angulo

$$\begin{array}{ll} ACE = 48^\circ & ABD = 24\frac{1}{2}^\circ \\ M = 0,0854 & M = 0,2215. \\ N = 0,7515 & N = 0,5852. \\ Q = 0,5689 & \end{array}$$

Unde cum sit

$$N - Q = 0,5852 - 0,5689 = 0,0163.$$

patet differentiam istam, quae nulla esse deberet, admodum parvam esse, atque deberi vel angulis minus exacte definitis, vel errori, cui obnoxium esse potest oculi iudicium.

§. 481. Similiter sumto angulo $ACE = 90^\circ$, inueni esse $Q = 0,6596$ (§. 474) Sumtoque angulo $ABD = 31^\circ$, est N ipsi respondens $= 0,6594$. quare

$$Q - N = 0,0002.$$

Quae differentia est veluti plane nulla. At vero angulo $ACE = 90^\circ$, non respondet $ABD = 31^\circ$, verummodo $= 30^\circ$. Unde ergo aberratio experimenti a formula est fere unius gradus.

§. 482. Non maiorem aberrationem pro ceteris angulis inueni. Calculum vero tantum constructione absolui, cum ob prolixitatem taediosior sit. Respondit vero

angulo ACE angulus ABD. cum esse deberet. differentia

10°	-	-	6	-	-	6	-	-	-	0
20	-	-	13	-	-	12	-	-	-	+1
30	-	-	17 $\frac{2}{3}$	-	-	17	-	-	-	+ $\frac{2}{3}$
40	-	-	21	-	-	21	-	-	-	0
50	-	-	24	-	-	25	-	-	-	-1.
60	-	-	27	-	-	28	-	-	-	-1.
70	-	-	28 $\frac{2}{3}$	-	-	29	-	-	-	- $\frac{1}{3}$.

§. 483. Inuenimus esse pro vitris, quibus
usus sum, (§. 472.)

$$c: 7 = 2: 13$$

Dabitur ergo hinc subtangens 7 per crassitiem
vitrorum. Haec vero erat $= \frac{1}{2}$ lineae digiti
parisi, unde erit

$$c = \frac{5}{8}'''$$

$$7 = 5\frac{1}{2}'''$$

Quod certe indicat, vitra ista fuisse admodum
impura, quippe lumen in ipsis vix $\frac{1}{2}$ digitum
percurrere ita debilitatur, ut ad tertiam fere
partem reducatur, duae tertiae partes disper-
gantur. Notandum tamen est, in hoc com-
puto non subtractum esse lumen quod in su-
perficie dispergitur, quodque pluries haud con-
temnendum esse iam supra vidimus.

§. 484. Subtangens 7 ipsam quoque exhibet dia-
phanorum pelluciditatem. Haec maxima est & ab-
soluta, ubi fuerit 7 infinita. Contra ea abso-
luta aderit opacitas, ubi fuerit $7 = 0$. Utrum-
que vero hunc casum in rerum natura haud
existere autumo. Quid obstat priori supra
iam vidimus (§. 326.) Posteriores perlustra-
bimus, cum de corporibus opacis sermo
erit.

§. 485. Quodsi ponamus opacitatem vel impelluciditatem esse in ratione reciproca pelluciditatis, erit quoque opacitas reciproce ut subtangens 7. Est enim (§. 467.) lumen amissum -- du reciproce ut ista subtangens, quae neque a lumine v , neque a via percurfa dx , verum modo, ab ipsa corporis impelluciditate pendet.

CAPVT III.

De lumine per superficies curuas, praecipue per lentes causticas refracto, huiusque mensura.

§. 486. **D**efinita iam, ut in superioribus factum est, quantitate radiorum, qui conos luminosos constituunt, dimensaque ea radiorum parte, quae a superficiebus vitrorum reflectitur, atque per easdem transmittitur, haud difficile erit, eos euolvere casus, quibus utraque simul obtinet. Hi vero cum sint infiniti, eorumque plurimi operosiori prosequendi sint calculo, siquidem cunctas minutias spectare, earumque rationem habere volueris, hinc medium quoddam in his tenere propositum est. Minutias istas, quatenus id absque notabili errore fieri poterit, abiiciemus, eosque potissimum casus perlustrabimus, qui frequentiores sunt, quibusque utendum erit ad experimenta quamplurima in sequentibus instituenda atque describenda, operam denique dabimus ut formulae eruendae concinniores euadant, quo facilius praxi adcommodari possint.

§. 487. Ut ergo & hic a simplicioribus progrediamur ad ea, quae magis sunt complexa, sumemus unicam lentem causticam, atque primo a vi eius reflectente abstrahendo, quaeremus, *qua ratione lumen per eam refractum, vel intendatur vel minuatur, quaeque eius in foco lentis sit densitas, quaeque ad illuminationem directam ratio.*

§. 488. Porro ut vel lentes ipsae vel earum aperturae sunt circulares, sic & obiectum luminosum circulare & planum statuemus, ita ut axis lentis per centrum obiecti normaliter transeat. Quid faciendum sit, ubi haec secus fuerint, hoc casu evoluta facile patebit.

§. 489. Sit ergo lens AB, quam ponemus Fig. 46. utrinque conuexam, cuiusque superficies sint segmenta sphaerarum, quarum semidiametri EC, CE. Axis lentis sit FCG, obiectum circulare $gG\gamma$ ad ipsum sit normale, huiusque centrum G. Focus sit in F, atque ductis rectis gCf , $\gamma C\phi$ erit ϕFf imago obiecti. Huius iam quaerenda sit claritas.

§. 490. At iam vel per se patet infinitos hic esse conos luminosos, singulosque eandem habere basin communem, quae est lens AB vel eius apertura. A parte antica coni isti sunt radiorum diuergentium, quippe e singulis obiecti $gG\gamma$ punctis radii in totam lentis superficiem incidunt. Ab altera parte CF coni isti sunt radiorum coincidentium, cum singuli radii, qui e puncto quolibet g in totam lentem sese diffundunt, refractione iterum in punctum f colliment, ibique puncti g imaginem depingant. Unde cum a vi reflectente & dispergente vitri hic abstrahamus animum,

P 5

facile

facile consequitur, quantitatem radiorum utriusque luvius coni eandem manere. Quod porro cum de singulis valeat, constat uniuersam radiorum quantitatem, quae ex obiecto in superficiem vel aperturam lentis incidit, totam eam quoque incidere in imaginem ϕFf . Quare habebitur imaginis illuminatio vel claritas media, si quantitas ista radiorum per aream imaginis diuidatur. Similique modo inuenietur claritas dato cuius imaginis puncto, dataeque cuilibet ipsius parti debita.

§. 491. Cumque porro per superiora quoque detur illuminatio directa, quae obtinet, ubi charta in ϕf obiecto luminoso obuertitur, consequens est, dari hinc quoque comparisonem inter illuminationem imaginis ξ eam quae remota lente directe obiecto luminoso debetur. His iam ita calculum adplicabimus.

§. 492. Sit ergo

distantia obiecti	- - -	$GC = b$
distantia foci	- - -	$CF = f$
femidiameter obiecti	- -	$Gg = x$
femidiameter foci	- -	$\phi F = \xi$
femidiameter lentis	- -	$AC = b$
femidiameter	- - -	$DC = c$
femidiameter	- - -	$CE = e$

Porro vocetur quantitas radiorum in lentem incidentium $= q$, claritas vel illuminatio imaginis media $= \eta$, illuminatio directa $= \lambda$, illuminatio absoluta $= \pi$ (§. 100. 123.)

§. 493. Lentis crassitiem ceu nullam spectamus, unde per principia dioptrices erit

$$f = \frac{2ceb}{(c+e)b - 2ce}$$

Porro

Porro cum per eadem principia sit

$$Gg : GC = Ff : CF$$

$$x : b = \xi : f$$

erit substitutione facta

$$\xi = \frac{2cex}{(c+e)b - 2ce}$$

Quibus ergo aequationibus datur ratio inter distantias & semidiametros obiecti & imaginis.

§. 494. Ut iam imaginis claritas definatur, ex superioribus recordabimur esse (§. 214.)

$$q = \frac{1}{2}\pi\pi[bb + bb + xx - \sqrt{(bb + bl + xx)^2 - 4x^2b^2}]$$

Quae est quantitas radiorum in lentis superficiem vel eius aperturam incidens. Hac ergo per aream imaginis, quae est $= \pi\xi\xi$ diuisa, prodibit imaginis claritas media.

$$\eta = q : \pi\xi\xi.$$

§. 495. Quodsi concinnorem desideres formulam, ducta recta gB erit (§. 217.)

$$q = \frac{1}{4}\pi\pi (gB - gA)^2$$

adeoque

$$\eta = \pi \frac{(gB - gA)^2}{4F\phi^2}$$

Vocetur conus obliquus BgA *conus extremus*, sintque Ag, Bg eius *latera*, erit gB — gA *differentia laterum coni extremi*. Hac ergo seruata notione, atque recordando esse π illuminationem absolutam, sequens inde elicietur

THEOREMA XXIII.

§. 496. *Illuminatio absoluta est ad illuminationem imaginis mediam, ut area imaginis ad aream circuli, cuius diameter est differentia laterum conii extremi gB, gA.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim sit

$$\eta = \frac{\pi(gB - gA)^2}{4 F\phi^2}$$

erit

$$\pi F\phi^2 : \frac{1}{4} (gB - gA)^2 \pi = \pi : \eta$$

Est vero $\pi F\phi^2$ area imaginis, $\frac{1}{4} (gB - gA)^2 \pi$ area circuli cuius diameter $= gB - gA$, & π est illuminatio absoluta; Unde constat propositum.

§. 497. Tranferatur Ag ex g in K, atque bifariam secta BK in P, erit $gP = \frac{gA + gB}{2}$, adeoque (§.222.)

$$\eta = \frac{\pi \pi Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2}$$

Unde porro

$$\eta = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot \phi^2}$$

Datur ergo illuminatio imaginis media η per semidiametros obiecti, lentis, & imaginis, & per medium arithmeticum inter latera conii extremi gB, gA. Unde

THEOREMA XXIV.

§. 498. *Illuminatio imaginis media est ad illuminationem absolutam, ut factum ex area obiecti in aream*

aream lentis ductae, ad factum ex area imaginis in aream circuli, cuius semidiameter est gP siue medium arithmeticum inter latera coni extremi gA, gB.

DEMONSTRATIO.

Cum enim sit

$$\eta = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot \phi F^2}$$

erit

$$\eta : \pi = (\pi \cdot Gg^2 \cdot \pi \cdot AC^2) : (\pi \cdot \phi F^2 \cdot \pi \cdot gP^2)$$

Sunt vero $(\pi \cdot Gg^2)$, (πAC^2) , $(\pi \phi F^2)$, $(\pi (gP)^2)$ areae quas effert theorema, & π est illuminatio absoluta. Unde evidens est propositum.

§. 499. Est porro §. 493.

$$GC : CF = gG : \phi F$$

quare substitutione facta erit

$$\eta = \frac{\pi \cdot AC^2 \cdot GC^2}{CF^2 \cdot gP^2}$$

Sed est $AC : CF = \text{tang. AFC}$, & $GC : gP$ erit cosinus cuiusdam anguli, qui dicatur $= \omega$, unde erit

$$\eta = \pi \cdot (\cos \omega)^2 \cdot (\text{tang AFC})^2$$

Unde facile elicietur

THEOREMA XXV.

§. 500. *Claritas in centro imaginis F est ad claritatem absolutam ut quadratum tangentis semidiametri adparentis lentis in F visae ad quadratum secantis eiusdem semidiametri adparentis in G visae.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim eadem maneat centri claritas, quaecunque sit obiecti magnitudo, ponamus ob-

obiectum esse infinite paruum, atque patet
conum luminosum extremum BgA cum cono
medio eoque recto BGA coincidere, adeoque
fore $gP = GA = GB$. Quare erit

$$\cos \omega = GC : GA = \cos \angle AGC$$

adeoque

$$\eta = \pi \cos \angle AGC^2 \cdot \tan \angle AFC^2$$

siue

$$\eta : \pi = \tan \angle AFC^2 : \sec \angle AGC^2$$

Sunt vero anguli AFC, AGC semidiametri len-
tis in F & G visae adparentes. Constat ergo
propositum.

THEOREMA XXVI.

§. 501. Si obiectum fuerit infinite remotum, erit
imaginis claritas media ad illuminationem absolutam,
ut quadratum tangentis semidiametri lentis in F visae
adparentis ad quadratum secantis semidiametri adpa-
rentis obiecti in C visi.

DEMONSTRATIO.

Etenim ob distantiam obiecti infinitam erit
 $gC = gP$, quare

$$\cos \omega = GC : gC = \cos \angle gCG$$

unde

$$\eta = \pi (\cos \angle gCG)^2 \cdot (\tan \angle AFC)^2$$

siue

$$\eta : \pi = (\tan \angle AFC)^2 : (\sec \angle gCG)^2$$

Est vero gCG semidiameter obiecti adparens,
cum in C videtur, & AFC semidiameter ad-
parens lentis, cum in foco F videtur. Unde
evidens est propositum.

§. 502. Quod si tantum quaeratur claritas
in

in centro imaginis, erit $gCG = 0$, sec. $gCG = 1$, adeoque

$$\eta : \pi = \text{tang AFC}^2 : 1.$$

Claritas in centro imaginis singulis casibus est maxima, in hoc vero casu ea quae ex omnibus media est decrescit ut quadratum cosinus semidiametri obiecti adparentis.

THEOREMA XXVII.

§. 503. Si distantiae obiecti & imaginis a lente fuerint aequales, erit illuminatio imaginis centralis ad illuminationem absolutam, ut quadratum sinus semidiametri lentis in F visae adparentis ad quadratum sinus totius.

DEMONSTRATIO.

Est enim hoc casu

$$GC = FC$$

unde

$$CGA = CFA$$

adeoque &

$$\text{sec} AGC^2 = \text{sec} AFC^2$$

At vero eodem hoc casu est (§. 500.)

$$\eta = \pi \cdot \text{tang AFC}^2 \cdot \text{sec} AGC^2$$

Unde substituendo erit

$$\eta = \pi \cdot \text{tang AFC}^2 \cdot \text{sec AFC}^2$$

sive

$$\eta = \pi \cdot \sin AFC^2$$

id est

$$\eta : \pi = \sin AFC^2 : 1$$

THEOREMA XXVIII.

§. 504. Si distantia obiecti & imaginis a lente fuerit aequalis, eadem erit chartae, qua excipitur imago, claritas in centro F, quae foret in eodem centro, si
obie-

obiecto remoto lens ipsa aequae esset luminosa ac est obiectum.

DEMONSTRATIO.

Est enim per theorema praecedens pro casu priori

$$\eta = \pi \sin AFC^2$$

at eadem formula prodit pro casu posteriori, vi theorematum quinti (§. 109. 121.) si hoc casu lens ipsa spectetur ceu obiectum illuminans. Constat ergo propositum.

§. 505. Idem obtinebit quoties fuerit $\omega = AFC$. Vidimus enim esse (§. 499.)

$$\eta = \pi \tan AFC^2 \cos \omega^2$$

quare substitutione facta erit

$$\eta = \pi \sin AFC^2$$

Est vero his casibus η claritas imaginis media, quae ergo erit eadem, quae obtineret in centro F, si lens aequae foret luminosa ab obiectum, atque charta ϕ a lente in AB posita collustraretur.

§. 506. Ceteris casibus positio haec non obtinet, etsi plurimis ad verum proxime accedat. Notandum tamen est, in toto hoc computo vim vitri reflectentem ut & quantitatem radiorum dispersorum ceu nullam haberi. Hoc vero ipso actu secus est, cum eiusmodi vitra non dentur. Unde utique claritas singularum partium imaginis minor est. Ponamus ergo eam ob radios reflexos & dispersos minui ut 1 ad κ , erit (§. 499.)

$$\eta = \kappa \pi \tan AFC^2 \cos \omega^2$$

§. 507.

§. 507. Frequentiores sunt ii casus, quibus distantia obiecti est veluti infinita Unde adeo pro his erit illuminatio imaginis in centro F

$$\eta = \kappa \cdot \pi \cdot \text{tang AFC}^2 \cos. gCG^2.$$

siue

$$\eta = \kappa \pi \sin AFC^2 \cos. gCG^2.$$

$$\cosin AFC^2$$

§. 508. Angulus AFC pendet ab apertura lentis. Quod si ergo haec ea fuerit, ut siue vere siue proxime fieri possit

$$\kappa = \frac{\cos. AFC^2}{\cos. GC^2 g}$$

fiet quoque

$$\eta = \kappa \pi \cdot \sin AFC^2.$$

§. 409. Dantur vero plurimi casus, quibus opportuna hae circumstantiae vel per se obtinent, vel admodum parum ab his aberrant. Sumta v. gr. lente pellucidior erit κ fere $\frac{1}{2}$. Porro si ista fuerit valde conuexa ut pro obiectis remotioribus angulus AFC sit 14° , erit quoque $\kappa = \cos. AFC^2$ aut proxime. Unde pro claritate centrali.

$$\eta = \pi \cdot \sin AFC^2$$

Quod si ergo his casibus radii solares per lentem causticam refracti in foco excipiantur charta alba, eadem erit imaginis claritas, quae foret, si in vicem lentis substitueretur particula ipsius solis eiusdem magnitudinis, chartam ad eandem distantiam CF collustratura.

§. 510. Hinc ergo quodammodo colligere licet, quam immensa sit solis claritas, quantaque ceteris paribus esse possit eius distantia ad

Q

quam

quam singula corpora terrestria comburentur. Eadem certe ni longe maior est vis caustica particulae solis in vicem lentes substituendae, ac est vis caustica radiorum ope lentis in foco collectorum. Unde dubio caret, in utroque casu eadem obiecta combustum iri.

§. 511. Illuminatio directa λ per theorema V. facile definitur. Ductis enim rectis gF , γF , erit $gFG = GF\gamma$ sinus semidiametri adparentis obiecti $G\gamma$ in F visi, unde erit (§. 109. 121.)

$$\lambda = \pi \sin gFG^2$$

THEOREMA XXIX.

§. 512. Si obiectum fuerit infinite remotum erit claritas imaginis media ad illuminationem directam, ut quadratum tangentis semidiametri adparentis ipsius lentis in F visae, ad quadratum tangentis semidiametri adparentis obiecti.

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc casu (§. 501.)

$$\eta = \pi \cdot \text{tang AFC}^2 \cdot \cos gCG^2$$

& ob $gFG = gCG$ erit quoque

$$\lambda = \pi \cdot \sin gCG^2$$

unde fit

$$\eta : \lambda = \text{tang AFC}^2 : \text{tang gCG}^2.$$

§. 513. Et in hoc theoremate a reflexione & dispersione radiorum abstraximus animum. Hac vero in calculum inducta erit

$$\eta : \lambda = \kappa \cdot \text{tang AFC}^2 : \text{tang gCG}^2.$$

§. 514. Hac ergo analogia dabitur ratio, quae est inter illuminationem directam & clarita-

ritatem imaginis in foco lentis, simul ac datur ratio $1 : \kappa$, quae lentis impelluciditatem atque vim reflectentem denotat. Vidimus vero ut plurimum fieri posse.

$$\kappa \cdot \text{tang AFC}^2 = \sin \text{AFC}^2$$

Cumque angulus AFC rarissime sit $> 20^\circ$, pro obiectis, quorum semidiameter minor est 10° aut 15° , fieri proxime poterit

$$\eta : \lambda = \text{AFC}^2 : \text{gFG}^2.$$

Sic v. gr. si ponamus esse angulum $\text{AFC} = 15^\circ$, atque semidiameter solis adparens sit $-\frac{1}{4}$ gr. erit

$$\eta : \lambda = 15^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 60^2 : 1 = 3600 : 1.$$

hoc ergo casu claritas imaginis solaris in foco lentis erit 3600 vices maior claritate chartae, quam sol directe collustrat.

§. 515. Porro cum sit (§. 513.)

$$\eta : \lambda = \kappa \cdot \text{tang. AFC}^2 : \text{tang gCG}^2.$$

erit

$$\kappa = \frac{\eta \cdot \text{tang gCG}^2}{\lambda \cdot \text{tang AFC}^2}$$

Unde cum experimentis id effici possit ut sit $\eta = \lambda$, dabitur quoque κ per angulos gCG, AFC, atque hoc casu erit

$$\kappa = \frac{\text{tang gCG}^2}{\text{tang AFC}^2}$$

Est vero

$$\begin{aligned} \text{tang gCG} &= \phi F : FC \\ \text{tang AFC} &= AC : FC \end{aligned}$$

unde

$$1 : \kappa = AC^2 : \phi F^2$$

Quod si ergo lentis apertura ita coarctetur, ut claritas imaginis claritati vel illuminationi directae sit aequalis,

Q 2

erit

erit lumen in aperturam lentis incidens ad lumen refractum, quod nempe lentem transit, ut area aperturæ lentis ad aream imaginis.

§ 516. Patet ergo hinc vel unico experimento determinari posse lumen quod a lente reflectitur & dispergitur, cuiusque summa est $= 1 - x$. Cum vero ratio $1 : x$ a ratione æqualitatis parum diuersa sit, patet & areas aperturæ lentis & imaginis parum inter se fore diuersas. Unde experimentum ita instituere conuenit, ut utraque area tanta sit, quæ commodè mensurari possit. Difficilius enim & minus exactè mensurantur areae minores, quales forent imago solis, vel candelæ vel lunæ in foco lentis admodum convexæ. Candelæ flamma cum insuper variabilis sit ratione magnitudinis, huic scopo plane non sufficit, quia illuminatio directæ ab ista magnitudine pendet, claritas imaginis perparum ab ea mutatur. En ergo quomodo rem adgre-diendam esse censui.

EXPERIMENTVM XIX.

§. 517. In camerâ probe obscurata unicam apertam reliqui fenestram, qua lumini libere pateret ingressus. Cælum nubibus erat obductum ex omni parte æque fere albidis. Parieti, qui ex aduerso fenestrae erat, affixi chartam albam, atque interposita lente caustica in charta ista excepi coeli per fenestram spectabilis imaginem. Cumque eiusdem lumen in ceteras partes chartae directè incidere, vidi lentem magna ex parte plano opaco esse

esse obtegendam, ut claritas imaginis illuminationi directae redderetur aequalis.

Circulus AB referat superficiem lentis, Fig. 47.
huius pars FBG plano opaco FGE sit obtecta,
spatium AFG conuerti in circellum ipsi aequa-
lem HI, ut instaurato experimento apertu-
ram dare possem circularem lentique concen-
tricam atque hoc modo experirer an ea sit haec
apertura, quae claritatem imaginis illumina-
tioni directae redderet aequalem. Quo facto
dimensus sum distantias & rectas sequentes in
pedibus rhenanis eorumque partibus deci-
malibus.

Distantia GF = 19,833.

CF = 0,521.

unde GC = 19,312.

porro.... AB = 0,191.

albedo fenestreae = 2,403.

eius latitudo... = 1,722.

hinc eius area = 4,138.

unde fit circulus

cuius diameter $\gamma = 2,295$

similiter diameter ima-

ginis $\phi f = 0,065$.

DC = CE = 0,502.

Diameter aperturae lentis = 0,071.

§18. Cum iam sit (§.515.)

$$1:z = AC^2 : \phi F^2 = AB^2 : \phi f^2$$

erit in experimento nostro

$$1:z = (0,071)^2 : (0,065)^2 = 71^2 : 65^2$$

adeoque proxime

$$1:z = 37:31 = 6:5$$

Q3

ut

Fig. 46.

ut adeo lens ista partem luminis circiter sextam reflectat & dispergat, adeoque maxime sit impura, minusque polita.

§ 519 Porro ob

$$\text{tang } gFG = \frac{gG}{FG} = \frac{1,1475}{19,8330} = 0,0578581.$$

est angulus vel semidiameter adparens

$$gFG = 3^{\circ} 18 \frac{1}{2}$$

unde

$$\sin gFG^2 = 0,003336$$

erit (§. 511) illuminatio directa

$$\lambda = 0,003336 \pi.$$

§. 520 Similiter erit

$$\text{tang } AFC = \frac{955}{5210} = 0,1833013$$

unde

$$AFC = 10^{\circ} 23 \frac{1}{3}.$$

similique modo

$$GCg = 3^{\circ} 24$$

Quare ob

$$\eta = \pi, \text{ tang } AFC^2. \text{ cosin } GCg^2$$

erit calculo subducto

$$\eta = 0,03356.$$

Quae est claritas imaginis, si lumen per tam lentem refringatur. Minuenda vero est in ratione areae totius lentis ad aream aperturæ relictæ, quam inveni esse ut 60 ad 7. Unde erit

$$\eta = 0,003915$$

$$\text{At deberet esse } \lambda = 0,003336$$

$$\text{differentia} = 0,000579$$

Quae

Quae est circiter pars sexta luminis directi, vel septima eius quod in lentem incidit, atque a superficie & particulis heterogeneis reflectitur & dispergitur.

§. 521. Plurima sunt, quae hic notanda veniunt, quibusque paullo immorari & in sequentibus iuuabit. Primo enim, quod vel per se patet, experimento isto non modo determinatur quantitas luminis intercepti, verum & insuper palam fit, Photometriae principia optime inter se cohaerere, atque experimentis firmari.

§. 522. Quod ad prius attinet, facili comparatione instituta ostendi potest, decrementum luminis, quod hic inuenimus esse sextam fere partem incidentis, cum eo quod in praecedenti capite determinauimus, optime congruere. Etenim politura & pelluciditas lentis, qua usus sum, a speculis supra adhibitis parum differebat. Quomodo vero instituentus sit calculus, qui lentibus adplicari debet, infra docebimus.

§. 523. Maximi quoque momenti est ista luminis in lentibus causticis amissi determinatio, cum plurima infra eaque grauissima occurrant experimenta, quae absque hac determinatione frustra instituuntur. Unde conuenit experimentum mox descriptum pluries atque curatius instituere, quo possit ex cunctis medium sumere ad verum quam maxime accedens. Cumque in sequentibus potissimum claritas contralis considerata veniat, primo disquiremus, qua ratione claritas punctorum a centro F remotiorum decrescat. Hinc enim

patebit, quantus esse possit angulus ϕCF , antequam in spatio ϕf oculus discernere valeat quandam differentiam. Facile enim prospicitur, claritatem a centro F versus ϕ & f parum decrescere, nisi angulus AFC sit admodum notabilis.

§. 524. Sit itaque in g spatiolum infinite paruum $\equiv 1$, quantitas radiorum ex isto spatiolo in superficiem lentis vel eius aperturam adeoque & in spatiolum imaginis analogum f incidentium vocetur Q . Hic enim iterum a reflexione & dispersione radiorum abstrahimus, postea utriusque rationem habituri. Porro recordandum est quantitatem Q prodire eandem, siue particula g , siue superficies vel apertura lentis statuatur luminosa (§. 197. 196.) Unde erit (§. 207.)

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{bb + xx - bb}{\sqrt{((bb + xx + bb)^2 + 4bbbb)}} \right)$$

Quae aequatio facile abit in sequentem

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{(bb + xx + bb) - 2bb}{\sqrt{((bb + xx - bb)^2 - 4bbxx)}} \right)$$

Sed est

$$\begin{aligned} gA^2 &= bb + xx + 2bx + bb \\ gB^2 &= bb + xx + 2bx + bb \end{aligned}$$

Unde fit

$$\begin{aligned} bb + bb + xx &= \frac{1}{2}(gB^2 + gA^2) \\ 2bbxx &= \frac{1}{2}(gB^2 - gA^2) \end{aligned}$$

Qui-

Quibus valoribus substitutis, debitaque reductione facta prodit

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{gB^2 + gA^2 - 4bb}{2 \cdot gB \cdot gA} \right)$$

Est vero

$$\frac{gB^2 + gA^2 - 4bb}{2gB \cdot gA} = \cos \angle BgA$$

Quare

$$Q = \frac{1}{2}\pi (1 - \cos \angle BgA) = \pi \left(\sin \frac{1}{2} \angle BgA \right)^2$$

§. 525. At vero area imaginis spatiosi g est

$$\frac{CF^2}{CG^2} = \frac{Ff^2}{Gg^2}$$

Unde erit eius claritas

$$\eta = \pi \cdot \frac{CG^2}{CF^2} \left(\sin \frac{1}{2} \angle BgA \right)^2$$

Quodsi ergo Lens AB in g spectetur, erit $\frac{1}{2} \angle BgA$ eius semidiameter minor adparens, adeoque illuminatio η erit ut eius quadratum. Unde & hoc theorema valde analogum est theoremati Vto. (§. 109.)

§. 526. Angulus gCG rarissime est $> 20^\circ$.

Unde pro punctis imaginis centro viciniori-

bus assumemus $\frac{x}{b}$ esse ita parvam ut eius di-

gnitates superiores contemni mereantur. Cum-

que porro ut plurimum $\& \frac{b}{b}$ sit quantitas val-

de parva, formulam

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \frac{(bb + xx + bb) - 2bb}{\sqrt{((bb + xx + bb)^2 - 4bbxx)}} \right]$$

Q s

in

in sequentem contrahere licet,

$$Q = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{(bb + xx + bb) - 2hb}{\sqrt{(bb + xx + bb)^2}} \right)$$

unde fiet

$$Q = \frac{\pi.bb}{bb + bb + xx} = \frac{\pi bb}{bb + bb} - \frac{\pi bbxx}{(bb + bb)^2} + \&c.$$

adeoque

$$\eta = \frac{\pi.AC^2.CG^2}{CF^2.GA^2} - \frac{\pi.AC^2.Gg^2.CG^2}{CF^2.GA^4} + \&c.$$

Dicta ergo claritate centrali imaginis = c , erit

$$\eta = c \left(1 - \frac{Gg^2}{GA^2} + \&c. \right)$$

ut adeo decrementum claritatis sit proxime ut quadratum tangentis anguli gCG .

§. 527. Ponamus iam oculum & eas claritates aequales habere, quae vigesima parte differunt, erit

$$\begin{aligned} (\text{tang } gCG)^2 &= \frac{1}{20} = 0,05 \\ \text{unde } \text{tang } gCG &= 0,2236 \end{aligned}$$

Quare angulus gCG circiter = $12\frac{1}{2}^\circ$

Tanta itaque esse poterit obiecti semidiameter adparens, antequam oculus in imagine quandam differentiam inter claritatem punctorum extremorum ϕf & eam, quae in centro F est, distinguere valet. Quoties ergo calculos prolixiores contrahere utile fuerit, eousque claritatem centram ceu constantem assumere licebit. Sic vero habebimus (§. 520.)

$$\eta = \text{tang } AFC^2 : \text{sec } AGC^2$$

& pro obiectis velut infinite remotis

$$\eta = \text{tang } AFC^2$$

§. 528.

§. 528. Obiecta vero ceu infinite remota spectare licet, simul ac semidiameter aperturae lentis AC ratione distantiae GC, siue angulus AGC fuerit paruitatis contemnendae. Oculus certe claritates centrales confundet et si fuerit sec $AGC^2 = \frac{21}{20}$, siue angulus AGC ad 12° usque excurrat. Unde utique compendio isto uti licebit, ubi AGC duos aut tres gradus non excedit.

§. 529. Obiter hic notabimus, dicta & ipsi oculo adplicari posse, cum simili plane modo definiatur claritas imaginis in eius retina depictae, similesque occurrant coni luminosi. Cumque apertura pupillae adeo parua sit, ut obiecta oculo ita admota, ut ob vicinitatem vix amplius distincte cerni possint, ceu infinite remota spectare liceat; hinc elucescit, cur obiectorum claritas visa ab earum distantia fere non pendeat, nisi ob alias causas, veluti ob dispersionem radiorum in aere, minuat. Evidens ergo hinc est differentia inter claritatem visam & illuminationem directam, quam maximam esse iam supra passim monuimus (37. 73. 79.) At de his infra plura.

§. 530. Standum iam est promissis in superioribus factis, (§. 64. 74. 84.) atque ostendendum, qua ratione principia Photometriae inter se cohaereant, atque experimentis firmentur. Vidimus, atque experimento XIX (§. 517.) euicimus, claritatem imaginis pendere a splendore obiecti & ab angulis AGC, AFC, eamque simpliciter reduci posse ad angulum AFC, simul ac obiectum fuerit remotus,

tius, minoremque habeat semidiametrum adparentem. Porro constat claritatem istam mutari posse, mutata tantum apertura lentis. Datur ergo medium imagines quocunque ita immutandi, ut aequae clarae euadant, atque hoc facto, ex angulo AFC concludere datur, quatenam sit inter claritatem ipsorum obiectorum ratio. Ut adeo hae inter se comparari hoc modo possint. En ergo

EXPERIMENTVM XX.

Fig. 48. §. 531. Posita candela in L, in CD, AB collocentur duo plana alba, vel chartae, ita ut lumen candelae normaliter in utramque incidat. Quo facto vi experimenti VII. patet, singulas earum partes ad sensum aequae esse illuminatas, quoties anguli DLC, ALB fuerint 20 gradibus minores, quod facile obtinebitur, cum magnitudo chartae arbitraria sit. Porro in EF, FG collocentur duae lentes aequae conuexae, atque in HI excipiantur chartarum AB, DC imagines. Cum vero clarior sit imago I, quae prouenit a charta AB candelae viciniore, patet obtegendam esse lentem FG, siue minuendam esse eius aperturam, usque dum utraque imago aequae videatur clara. Quo facto, semidiameter aperturae cuiusuis lentis erit in ratione directa distantiae chartae respondentis a candela, siue area aperturae erit ut quadratum istius distantiae.

§. 532. Experimento hoc instituto positionem hanc reuera obtinere inueni. Sumsi vero distantiam chartae AB 10 digitorum parsino-
rum

rum, chartae DC $14\frac{1}{2}$ digitorum. Atque inveni lentis FG aperturam fuisse partem dimidiam lentis EF. Utriusque lentis a plano albo IH distantia erat 7 dig. & distantia candelae LH fere 5 pedum diameter aperturae EF $= 16\frac{3}{4}''$, aperturae FG $= 11\frac{3}{4}''$.

EXPERIMENTI RATIO.

§. 533. Dicta claritate charte AB = C, chartae DC = c, patet, fore

$$\text{claritatem imaginis I} = C.(\text{tang } \frac{1}{2}\text{FIG})^2$$

$$\text{imaginis H} = c.(\text{tang } \frac{1}{2}\text{EHF})^2$$

At utraque claritas est aequalis, & ob aequalem utriusque lentis a plano HI distantiam, erit

$$\text{tang } \frac{1}{2}\text{FIC} = \frac{1}{2}\text{FG:gl}$$

$$\text{tang } \frac{1}{2}\text{EHF} = \frac{1}{2}\text{FE:eh} = \frac{1}{2}\text{FE:gl}$$

unde ergo

$$C.FG^2 = c.FE^2$$

sive

$$C:c = FE^2:FG^2$$

At vero est (§. 48.)

$$C:c = LC^2:LA^2$$

adeoque

$$FE:FG = LC:LA.$$

Quod cum verum sit, vi experimenti, constat Photometriae principia, quibus superstructus est calculus rata esse.

EXPERIMENTVM XXI.

§. 534. Chartam viciniorem in praecedenti experimento posui in K, ita ut utraque a candela aequè distaret, sed lumen candelae in chartam K oblique incideret, sub angulo 30° .

Quo

Quo facto minuenda erat apertura lentis EF, ut utraque imago redderetur aequae clara. Inueni vero aperturam lentis FG fuisse duplo maiorem apertura lentis EF. At ex principiis Photometriae consequitur, posita distantia utriusque chartae a candela aequali, uniuersaliter aream aperturae debere esse in ratione reciproca sinus anguli incidentiae, simul ac fuerit $eH = gI$.

DEMONSTRATIO.

Dicta claritate chartae DC = c , chartae K x , sinus anguli incidentiae in chartam K vocetur f , atque ob lumen in chartam DC sub angulo recto incidens erit (§. 53.)

$$c:x = 1:f$$

At ob $DH = KI$, & $eH = gI$ erit quoque claritas $H:I = (EF^2 c):(FG^2 x) = EF^2:(FG^2 f)$

Sed est

$$H = I, \text{ unde } EF^2 = f.FG^2$$

sive

$$1:f = FG^2:EF^2.$$

Quod erat demonstrandum.

§. 535. In utroque hoc experimento assumimus distantias DH, BI, KI tantas, ut ratione diametri aperturae utriusque lentis pro infinitis haberi possint, eoque ipso calculus redderetur concinnior (§. 527. 528.) Porro ob eandem rationem lentes sumsi aequales, ut fieri posset $eH = gH$. Quodsi secus fuerit, de tangentibus angulorum EHe, FIg valebunt, quae de diametris aperturarum diximus.

EX.

EXPERIMENTVM XXII.

§. 536. Remota lente FG, utramque chartam D, K ita posui, ut earum distantia a candela L esset aequalis, & radii in utramque normaliter inciderent, sed alterius chartae K inclinatio ad planum HI esset obliquior, adeoque radii in lentem EF incidentes sub angulo recto minori emanarent. Quo facto nihilominus vidi, utriusque chartae imaginem H, h esse aequae claram.

§. 537. Patet ergo hinc obliquitatem emanationis claritatem imaginis non mutare, adeoque eandem esse radiorum densitatem, siue plus siue minus emanent oblique. Quod ipsum cum & de imagine obiecti in retina oculi depicta valeat (§. 529.) patet hinc experimenti praesentis cum iis consensu, quae in superioribus descripsimus (§. 74....84.) patetque porro, quod supra demonstraui (§. 87) superficiei luminosae obliquius positae substitui posse aliam, quae obiecto recta obuersa sit. Porro notandum est, in his experimentis perinde esse, siue maior siue minor sit lentis peluciditas, dummodo in utroque priori (§. 531. 534.) ubi duae lentes adhibentur, utraque sit aequae diaphana, quod experiri licet, si eiusdem chartae DC imago in foco utriusque lentis excipiat charta alba. Utraque enim aequalis videri debet, simulac anguli EHe, glF fuerint aequales. Hi vero cum ab apertura lentium pendeant, facile ad aequalitatem reducuntur.

§. 538 Si radii per lentem refracti extra Fig. 46. focum, v. gr. in RS excipiantur plano albo,

cx

ex supra demonstratis haud difficulter dabitur
 plani istius claritas, quae utique minor est
 claritate imaginis ϕf , atque vel maxime pen-
 dent a magnitudine obiecti adparente. Rem-
 vero omnem sic expedire licet.

§. 539. Supra iam vidimus, post lentem
 esse infinitos conos luminosos, quorum basis
 communis est apertura lentis, apices vero sunt
 in superficie curua, cui superficiem sphaericam
 radio CF descriptam substituere licet. Qua-
 tenus vero angulus ϕCF est paucorum gra-
 duum, planum ϕf absque notabili errore eius
 vicem sustinet. Ex his conis qui medius est
 AFB basi normaliter insistit, ceteri omnes sunt
 plus minusue obliqui. Horum extremi sunt
 $A\phi B$, AFB . Porro quilibet eorum planum
 SR transit, ita ut in isto medius AFB abscin-
 dat circulum cuius diameter est NQ centrum
 in ipso axe lentis in M . Ceteri conii pariter ab-
 scindunt circulos medio isti aequales, sed ex-
 centricos. Unde in plano SR dabitur spatium
 circulare, cuius diameter est qn , quodque sin-
 gulis istis circulis est commune. Huius spatii
 claritas maxima est, quia ex omnibus conis
 radii in istud incidunt. Contra ea claritas ab-
 n versus R & a q versus S decrescit, atque
 in punctis extremis R , S , evanescit.

§. 540. Etsi ergo lumen in plano RS inae-
 qualiter disseminetur, attamen spatium me-
 dium qn aequae illuminatur, ac si omnes isti
 conii cum medio AFB coinciderent. Adeo-
 que dabitur spatii istius qn claritas, si quan-
 titas radiorum, qui per lentem transeunt
 qui.

quique in foco ϕ coincidunt, per aream circuli diuidatur, cuius diameter est NQ .

§. 541. Vidimus vero supra (§. 497.) esse

$$q = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2}$$

unde dicta claritate in $qn = \eta$ erit

$$\eta = \frac{\pi Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot NM^2}$$

Est enim area circuli $NQ = \pi \cdot NM^2$

§. 542. Claritas haec in eadem ratione minuenda est, qua ob reflexionem & refractionem lumen per lentem refractum minuitur. Ceterum probe notandum est, aucta distantia CM decrefcere diametrum nq , ut tandem euanescat in V , ubi latera conorum extremorum $A\phi$, $B\phi$ axin secant. Unde formula cruta ultra distantiam CV extendi nequit

§. 543. Eo vero maior erit haec distantia, quo maior est apertura lentis, quo minor diameter imaginis. Quod si ergo ϕ fuerit imago solis vel lunae, atque angulus AFC 10 aut plurium graduum, punctum V . centro F adeo erit vicinum, ut distantia VF fere sit nulla.

§. 544. Simili modo pone focum F datur punctum v , ipsi V analogum. Atque translato plano SR in qn , dabitur in sr spatium circulare, a cunctis conis luminosis collustratum. Eadem vero ratione inuenitur eius claritas

$$\eta = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot (nm)^2}$$

R

§. 545.

§. 545. Quodsi utraque haec claritas cum claritate imaginis in foco (§. 497.)

$$\eta = \frac{\pi \cdot Gg^2 AC^2}{gP^2 \cdot \phi F^2}$$

comparetur, patebit esse

$$\eta \cdot \phi F^2 = \eta' \cdot MN^2 = \eta'' \cdot (mn)^2$$

Fig. 49.

§. 546. Si lens fuerit concaua ACB, constat ex Dioptricis, focum eius virtuale *sive* imaginarium esse inter lentem & obiectum inf. Etsi vero in ϕf nulli radii incidant, attamen radii e quouis puncto obiecti g per conum luminosum AGB in superficiem lentis incidentes ita per eam refringuntur, quasi cuncti e puncta f emanarent, conumque luminosum constituerent, qui est RAfBQ.

§. 547. Ponamus iam radios per lentem AB refractos in M excipi plano LMH. In hoc plano singuli coni L ϕ S, NFQ RfH circulos abscindent aequales sed excentricos, atque spatium circulare, cuius diameter est = RS omnibus erit commune. Hoc ergo spatium aequae illuminabitur, ac fieret, si omnes isti coni coinciderent. Unde dabitur eius claritas, quantitatem radiorum in lentem incidentium per spatium circuli QN diuidendo.

§. 548. Fiat ut supra (§. 497.) $gK = gA$, atque bifariam secetur KB in P, erit $gP = \frac{1}{2}(gA + gB)$ unde dicta quantitate radiorum in lentem incidentium q , claritate spatii RS = η , erit (§. 222.)

$$q = \frac{\pi \pi \cdot Gg^2 AC^2}{gP^2}$$

unde

unde

$$\eta = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot MN^2}$$

Est enim $\pi \cdot MN^2$ basis conorum $L\phi S, NFQ$ &c. per quam quantitas radiorum est diuidentia.

THEOREMA XXX.

§. 549. Si lumen obiecti per lentem concavam AB refractum in M excipiatur plano HL ad axin lentis normali, erit illuminatio spatii RS , ad illuminationem absolutam, ut factum ex area obiecti in aream lentis ducta ad factum ex area baseos conorum NFQ in aream circuli ducta, cuius semidiameter est gP siue medium arithmeticum inter latera coni extremi gB, gA .

DEMONSTRATIO.

Haec plane eadem est ac demonstratio theorematismis vigesimi quarti. (§. 498.)

§. 550. Sit ABE sphaera vitrea vel pellucida, cuius apertura sit AB . Obiectum circulare $gG\gamma$, cuius imago in foco F excepta sit ϕf . Dicatur iterum quantitas radiorum in aperturam AB incidentium $= q$, claritas imaginis $= \eta$. Ductis lateribus coni extremi gA, gB , fiat $gK = gA$, bifariam secta KB in P erit

$$gP = \frac{1}{2}(gA + gB)$$

Unde (§. 222.)

$$q = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AD^2}{gP^2}$$

adeoque ob aream imaginis $= \pi, \phi F^2$, & $\eta = \frac{q}{\pi. \phi F^2}$ erit

$$\eta = \frac{\pi Gg^2. AD^2}{gP^2. \phi F^2}$$

Et hic ergo valebit Theorema XXIV^{um}, una cum corollariis ipsi adnexis. (§. 499. seqq.)

§. 551. Ceterum in his calculis nullam rationem habuimus luminis, quod a superficiebus vitri reflectitur, & dispersione amittitur. Huius vero quantitas satis erit notabilis, si sphaerae diameter fuerit aliquot digitorum, atque apertura AB ad 20 aut 30 gradus aseat. Quantum vero hinc oriatur claritatis imaginis decrementum experimento exploratur, quod undevigesimo supra descripto (§. 517.) plane simile est.

§. 552. Cum sit

$$Gg : \phi F = GC : CF$$

erit substitutione facta

$$\eta = \frac{\pi. GC^2. AD^2}{gP^2. CF^2}$$

Compleatur rectangulum aCDA, atque necestantur puncta a, F recta aF. Porro fiat ut supra (§. 499.)

$$GC : gP = \cos \omega$$

atque erit

$$\eta = \pi. \tan aFC^2. \cos \omega^2$$

siue

$$\eta = \frac{\pi. \tan aFC^2}{\sec \omega^2}$$

§. 553. Ponamus obiectum esse infinite remotum, atque quaerenda sit claritas centralis in F, erit sec. $\omega = 1$.

unde

$$\eta = \omega \cdot \text{tang } aFC^2 = \pi AD^2 : CF^2$$

Sit semidiameter sphaerae $AE = e$, erit hoc casu $CF = \frac{3}{2}e$, unde

$$\eta = \frac{4}{9}\pi \cdot AD^2 : e^2$$

§. 554. Quodsi iam a sphaera abscindatur pars posterior AEB, ut remaneat lens plano conuexa ADBHA, erit (§ 499.) posito itidem obiecto infinite remoto, claritas centralis

$$\eta = \pi AD^2 : DF^2$$

At vero hoc casu erit distantia focalis

$$DF = 2e$$

unde

$$\eta = \pi \cdot AD^2 : 4e^2$$

Erit ergo

$$\eta : \eta' = \frac{4}{9} : \frac{1}{4} = 16 : 9$$

siue

Claritas centralis in foco sphaerae HE erit ad claritatem centralem in foco lentis plano conuexae AHBD ut 16 ad 9.

§. 555. Quodsi vero lens fuerit utrinque aequae conuexae, erit

$$DF = e$$

Quare

$$\eta : \eta' = \frac{4}{9} : 1 = 4 : 9 = 16 : 36$$

Unde claritas centralis sphaerae, lenti plano conuexae & lenti utrinque aequae conuexae debita erit ut numeri 16, 9, 36. Per se vero patet lentes istas debere esse huius ipsius sphaerae segmenta, aperturam requiri eandem, obiectum idem atque in-

infinite remotum, atque animum hic abstrahi a lumine reflexo & disperso, quippe cuius quantitas in sphaera ob maiorem crassitiem maior est.

§. 556. Theorematum haecenus erutorum amplissimus in experimentis photometricis est usus, unde ne nimis augeatur libri moles, singulis casibus specialibus ista non adplicabimus, cum ista adplicatione nil sit facilius. Plurima huc spectantia reperies in systematibus optici virorum profundae indaginis SMITHII & KAESTNERI. Similiaque ingeniosissimus EVLERVS in Commentariis Academiarum Imperialis & Regiae, quae PETROPOLI & BEROLINI florent cum orbe erudito communicavit, theoriae luminis curatius euoluedae praeprimis intentus. Sancti vero a quantitate luminis reflexi & dispersi animum abstraxerunt, & correctione indigere summi EVLERI de proprio imaginis splendore placita infra videbimus.

§. 557. Praecipui vero casus, quibus vulgo adplicari possunt ista theoremata, sunt *Camera obscura, laterna magica & microscopium solare*. Huc quoque referas experimentum a cel. BOVGVER in tractatu iam passim laudato (§. 315. 360. 468. 475.) descriptum, quo lumen solis & lunae lente concaua exceptum ita debilitavit, ut cum lumine candelae comparari ipsique aequari posset.

§. 558. Porro vel me tacente, evidens est, ope lentium conuexarum determinari posse lumen a tabulis vitreis planis reflexum & refractum. Definita enim quantitate radiorum, quos

quos lens ipsa reflectit & dispergit, pone len- Fig. 46.
tem in RS vel ante eam collocentur tabulae
vitreae quotlibet, atque haud secus ac in Ex-
perimento XIX. supra descripto factum est
(§. 517.) inuenietur debilitatio claritatis in F,
sive lumen a lente & a tabulis istis reflexum &
dispersum. Ab hoc subtrahendum erit decre-
mentum, quod ipsi lenti debetur, ut tandem
habeatur illud, quod a tabulis istis prouenit.
Alia experimenta huc spectantia, quae rariora
sunt, infra occurrent, cum de ea claritate
agetur, quae obiectis illuminatis inest.

CAPVT IV.

De lumine per plures lentes refracto, vel
ab eadem lente pluries reflexo
& refracto.

§. 559. **H**aftenus istud tantum lumen cal-
culo & experimentis perlustra-
uimus, quod unicam lentem peragratur, at-
que in focum eius coincidit, ibique obiecti
imaginem depingit, quam *primariam* vocare
haud incongruum erit. At vero cum lumen
in superficies lentis incidens iterum reflecta-
tur, iam in vulgus notum est, imaginem istam
non esse unicam, verum insuper alias dari
numero velut infinitas. Ex his facile quatuor Fig. 51.
in oculos incurrent, si lentem AB intra lumen
L & oculum O ita ponas, ut radii La obliquius
incidant, varietque reflexi & refracti secun-
dum rectas aO, bO, cO, dO obliquius ite-
rum in oculum O incidant. Quodsi vero
R 4 ima-

imagines istae charta excipiantur duae tantum visibiles erunt, quarum altera est primaria ista, quae pone lentem in foco exstat, altera a parte antica per reflexionem visibilis erit. Ceterae omnes debiliores sunt, atque ibi sese sistunt, ubi a lumine quod in utramque priorem incidit veluti obscurantur, visuque subducuntur (§. 15.)

§. 560. Ut vero distantias istorum focorum calculo quodammodo prosequamur, eas exhibebimus pro radiis axi vicinioribus, ipsique parallelis, atque insuper crassitiem ponemus esse velut infinite parvam, ut faciliores assequamur formulas, quippe prolixiores hic fere superfluae sunt.

§. 561. Per se vero patet, omnes istos focos deberi reflexioni luminis quae intra lentem fit, dum lumen ab altera eius superficie interiore ad alteram successiue reflectitur, haud secus ac istud intra tabulas vitreas planas reflecti supra vidimus (§. 320. 339.) Cum vero hoc casu superficies lentis sint sphaericae, via ista luminis reflexi aliter erit determinanda.

Fig. 52.

§. 562. Sit ergo VE lens utrinque conuexa, aF eius axis, semidiameter conuexitatis anterioris vD sit $= Df = f$, posterioris VD sit $= DF = F$. Ponamus iam lumem per rectam wV incidere in superficiem posteriorem V, pars eius refracta perget per rectam VG, ibique in G focum constituet. Pars reliqua per Vv regreditur, atque in v in superficiem anteriorem incidit, ubi denuo ex parte reflectitur, & ex parte refringitur. Refractum transeat vitrum secundum directionem vC, in C axin intersect

fecet, ibique focum anteriorem constituat.
 Detur iam distantia foci posterioris DG , atque quaerenda sit distantia anterioris DC .

§. 563. Quod ut fiat producantur

rectae	Vw'	Ut sint	$aVwA$
	Vv	- - -	$bVv\beta B$
	vC	- - -	Cvc

Porro ducantur FV , fv , atque fiat

$$DV = i$$

$$Df = f$$

$$DF = F$$

$$aD = a$$

$$DC = x$$

$$DG = y$$

Denique centris V , v , radiis VF , vf describantur arcus AFB , cbf , qui erunt infinite parui, cum puncta V , v sint axi infinite vicina, & radii AV , VG , $V\beta$, vC ipsi fere paralleli (§. 560.)

§. 564. At iam per principia dioptrices est

$$AF = FB,$$

$$fc : fb = 3 : 2$$

Porro ob

$$aD : DV = aF : AF$$

erit

$$AF = FB = \frac{a + F}{a}$$

Similiter ob

$$(VD + FB) : DF = VD : D\beta$$

habetur

$$D\beta = \frac{aF}{2a + F}$$

R 5

Porro

Porro ob

$$D\beta:DV=\beta f:fb$$

erit

$$fb=\frac{f(2a+F)+aF}{aF}$$

unde &

$$fc=\frac{3f(2a+F)+3aF}{2aF}$$

Denique ob

$$(fc-DV):fD=DV:DC$$

est

$$x=\frac{2afF}{3f(2a+F)+aF}$$

Qua ergo aequatione datur relatio inter distantias Da, & D β .

§. 565. Porro producta recta FV in I, centro V, radio VG describatur arcus GHI in H rectam Va secans, eritque per principia Dioptrices

$$IG:IH=3:2$$

unde

$$GH=\frac{1}{3}GI.$$

Sed est

$$FD:DV=FG:GI$$

unde

$$GI=\frac{F+y}{F}$$

adeoque

$$GH=\frac{F+y}{3F}$$

Porro ob

$$aD:DV=aG:GH$$

erit

erit

$$gH = \frac{a-y}{F+y} = \frac{a}{3F}$$

adeoque

unde

$$a = \frac{3Fy}{2F-y}$$

Quo valore in aequatione ante reperta (§ 64.)

$$x = \frac{2afF}{3f(2a+F)+aF}$$

substituto, tandem prodit

$$x = \frac{2fFy}{2fF+5fy+Fy}$$

§. 566. Sic ergo datur relatio inter distantias focorum proxime sibi subsequentium G, C. Quodsi ergo focus proxime sequens sit K, facile pater huius distantiam DK haud ab simili modo dari per distantiam DC, hoc tantum discrimine ut radii conuexitatis F, f sibi inuicem sint substituendi. Sic enim dicta distantia $DK=y'$, prodibit

$$y' = \frac{2fFx}{2fF+(5F+f)x}$$

§. 567. Quodsi iam iterum focus subsequens sit in L, dicta distantia $DL=x'$ patet fore

$$x' = \frac{2fFy'}{2fF+(5f+F)y'}$$

Ut adeo distantias vel radios F, f debite alternando successive reperiantur, distantiae focorum subsequentium y'', x'', y''', x''' &c.

§. 568.

§. 568. Sit ergo distantia obiecti $= d$, atque ponamus focum primarum esse in G, constat ex principiis dioptricis, fore

$$y = \frac{2fF}{(f+F) - 2fF:d}$$

Quodsi ergo hic valor in aequatione (§. 565.)

$$x = \frac{2fFy}{2fF + (5f+F)y}$$

atque porro valor ipsius x in aequatione (§. 566.)

$$y' = \frac{2fFx}{2fF + (5F+f)x}$$

successive substituantur, continuata hac substitutione in valoribus focorum subsequentium prodibit distantia foci

$$\text{primarii } DG = y = \frac{2fF}{F+f - 2fF:d}$$

$$\text{secundi } DC = x = \frac{fF}{3f+F - fF:d}$$

$$\text{tertii } DK = y' = \frac{2fF}{7(F+f) - 2fF:d}$$

$$\text{quarti } DL = x' = \frac{fF}{6f+4F - fF:d}$$

$$\text{quinti } - - - = y'' = \frac{2fF}{13(F+f) - 2fF:d}$$

$$\text{sexti } - - - = x'' = \frac{fF}{9f+7F - fF:d}$$

&c.

§. 569. Adeoque in genere erit distantia foci

$$(2n+1)^{\text{ta}} \text{ pone lentem} \\ Y = \frac{2fF}{(6n+1)(F+f) - 2fF:d}$$

$$(2n+2)^{\text{ta}} \text{ ante lentem} \\ X = \frac{fF}{(3n+3)f + (3n+1)F - fF:d}$$

§. 570. Si fuerit $f = F$, siue posita lente utrinque aequae conuexa, utraque formula ita contrahetur ut in genere pro foco $(m+1)^{\text{to}}$ sit eius distantia

$$= Y \text{ siue } = X = \frac{f}{3m+1-f:d}$$

adeoque erit.

$$y = \frac{f}{1-f:d} \quad x = \frac{f}{1-f:d}$$

$$y' = \frac{f}{7-f:d} \quad x' = \frac{f}{10-f:d}$$

$$y'' = \frac{f}{13-f:d} \quad x'' = \frac{f}{16-f:d}$$

&c

&c

§. 571. Quodsi insuper obiectum ponatur infinite remotum erit $f:d = 0$, adeoque focorum distantiae successive erunt $f, \frac{1}{4}f, \frac{1}{7}f, \frac{1}{10}f, \frac{1}{13}f$ &c. In singulis vero istis casibus distantiae istae decrescunt in progressionem harmonicam, siue ut ordinatae hyperbolae intra asymptotos aequae distantes.

§. 572. Distantiae istae breuissime constructione reperiuntur. Quod ut ostendamus, aequationes (§. 565. 566), quibus exprimitur x per y & y per x ita immutabimus, ut sit

$$x =$$

$$x = \frac{y \cdot 2fF : (5f + F)}{y + 2fF : (5f + F)}$$

$$y = \frac{x \cdot (2fF : (5F + f))}{x + 2fF : (5F + f)}$$

Fig. 53. Sit iam lens in D, eius axis sit GC, radius conuexitatis maior $= F$ minor $= f$ atque lens ita sit posita ut superficiem magis conuexam ipsi C obuertat. Fiat iam

$$DA = AB = 2fF : (5F + f)$$

$$DH = HE = 2fF : (5f + F)$$

atque praeparatio ad constructionem erit facta. Ponamus obiectum esse a parte ipsius DC, atque focum primarium cadere in G, ita ut dicta distantia obiecti $= d$, sit

$$DG = \frac{2fF}{F + f - 2fF : d}$$

§. 573. Distantiae focorum sequentium ita reperientur.

1°. Ducta GcE transferatur Dc in DC, erit C focus secundus siue primus eorum, qui cadunt intra lentem & obiectum.

2°. Ducta BC, transferatur Dk in DK, erit K focus tertius, siue secundus pone lentem.

3°. Ducta KE, transferatur Dl in DL erit L focus quartus, siue secundus ante lentem.

4°. Ducta LB, transferatur Dm in DM erit M focus quintus.

Simili porro modo & ceteri inuenientur.

§. 574. Distantia foci primarii eadem est, utram lentis superficiem obiecto obuertas, manente nempe eius a lente distantia. Contra ea distantia focorum sequentium mutatur, inuersa lentis positione, quoties non fuerit aeque

aeque conuexa. Cum ergo duae distantiae DG, DC experimentis detegi possint, dabitur hinc methodus conuexitatem lentis experimentis determinandi, quam vero hic praetergredimur, cum totus hic calculus ad Dioptricam pertineat.

§. 575. Magnitudo singularum imaginum est in ratione distantiae focorum simplici, si diametros, duplicata vero, si areas spectes, atque ex superioribus constat, definitum iri earum claritatem, si quantitas radiorum in eas incidentium per aream diuidatur. Cum vero lumen omne in lentem incidens intra eam successiue diuidatur, quaerendum est, quota eius pars cuius imagini illuminandae inferuiat.

§. 576. Quod ut proxime assequamur, compendio quodam utemur, ponendo omne lumen in lentem incidens, atque intra eam ultra citraque reflexum, in superficies normaliter incidere, quod vel ideo assumere licet, quia quantitas luminis reflexa & refracta non multum euadit diuersa, etsi angulus incidentiae a recto vel decem pluribusue gradibus differat (§. 443.)

§. 577. His ita positis ex superioribus resumemus valores & significatum literarum $q, p, n, m, e, v, c, \gamma$, positoque lumine in lentis superficiem obiecto obuersam incidente $= 1$, erit (§. 443. 467. 469. 472.)

$$q = 0,0199$$

$$p = 0,0448$$

$$m = 0,9552$$

$$n = 0,9801$$

$$mn = 0,9362$$

log

$$\log e = 1, \\ -c:7 \quad -2:13$$

siue sumtis logarithmis Briggianis

$$\log e = 0,4342945$$

$$-\log v = 0,0666607$$

unde $v = 0,8577$.

§. 578. Incidat ergo lumen $= 1$ in superficiem lentis anteriorem externam, reflectetur eius quantitas $q = 0,0199$. pars reliqua $n = 0,9801$ ingreditur lentem, atque dum eius crassitiem percurrit debilitatur, ut in superficiem internam posticam tantum incidat quod reliquum est $= nv$. Cum vero & hic pars eius $= nv^2p$ reflectatur ad superficiem anteriorem regressura, pars altera nv^2pm refracta conuergit in locum primarium, ut adeo quantitas radiorum in istum incidentium sit $= nv^2pm = 0,8030$.

§. 579. Pars altera dum ad superficiem anteriorem regreditur, iterum debilitatur dispersione, ut in superficiem istam incidat lumen reliquum nv^2p . Hoc iterum diuiditur ut pars reflexa sit $= nv^2p^2$, refracta $= nv^2pm$ a qua pendet imaginis primae claritas. Est vero, subducto calculo, quantitas ista $= 0,03085$.

§. 580. Pars reflexa nv^2p^2 ad superficiem posteriorem regrediendo dispersione euadit $= nv^3p^2$, ibidemque reflectitur nv^3p^3 , refringitur nv^3p^2m . Pars haec refracta in secundum focum posticum coincidit, estque $nv^3p^2m = 0,00128$.

§. 581.

§. 581. Simili porro ratiocinio inuenitur quantitas luminis in focum secundum anteriorem, atque in quocunque sequentes incidens, quippe quantitates istae seriem geometricam constituent vehementer conuergentem

$$nmv, nm^2v^2p, nm^3v^3p^2, nm^4v^4p^3, \dots$$

Erit ergo v. gr. quantitas luminis quae in focum secundum anteriorem incidit $= nm^4v^4p^3 = 0,0000455$.

§. 582. Notandum tamen claritatem imaginum ultimarum maxime pendere a gradu pelluciditatis lentis, quam hic assumimus, ut in capite secundo huius Partis pro tabulis vitreis mediocriter pellucidis eam determinauimus. Unde calculus, quem hic instruimus, numericus ad lentes quascunque temere non est extendendus. Quam ipsam ob causam eum tantum ad casum specialem eumque simpliciores adplicabimus.

§. 583. Ponemus nempe lentem utrinque aequae conuexam, unde fiet $f = R$. Porro distantiam obiecti d sumemus esse infinitam. Quo posito distantia focorum erit

$$f, \frac{1}{4}f, \frac{1}{9}f, \frac{1}{16}f, \frac{1}{25}f, \&c.$$

§. 584. Quaerenda iam sit claritas imaginis solaris in singulis istis focis. Cum hoc casu angulus incidentiae maxime obliquus ab angulo recto parum discrepet, absque notabili errore assumere licebit diametros imaginum esse in ratione simplici directa distantiae focorum. Unde claritas cuiusvis imaginis erit directe ut quantitas luminis in eam incidentis, reciproce ut quadratum distantiae imaginis siue foci a lente.

S

§. 585.

§. 585. Dicta ergo claritate imaginis primariae post lentem $= \lambda$, erit claritas imaginis
 primae anterioris $= 16\lambda v p$
 secundae posterioris $= 49\lambda v^2 p^2$
 secundae anterioris $= 100\lambda v^3 p^3$
 tertiae posterioris $= 196\lambda v^4 p^4$ &c.

§. 586. Quod si iam ponamus esse $v = 0,8577$,
 erit $p v = 0,038425$. adeoque habetur claritas
 imaginis

primariae post lentem $= \lambda$
 primae anterioris $= 0,6148.\lambda$
 secundae posterioris $= 0,07235\lambda$
 secundae anterioris $= 0,005673\lambda$
 tertiae posterioris $= 0,0004273\lambda$.
 &c.

Fig. 46. §. 587. Reliquum ergo est, ut claritatem
 imaginis primariae definiamus. Quem in fi-
 nem ponemus solis semidiametrum adparen-
 tem esse $= 16'$, porro ut in experimento XIX.
 (§. 517) angulum AFC assumemus esse $= 10^\circ 23'$.
 Unde ob distantiam solis velut infinitam,
 vi theorematis XXVI (§. 501.) erit

$$\lambda = \pi. (\cos. 16')^2. \tan(10^\circ 23')^2$$

siue

$$\lambda = 0,03357. \pi.$$

At haec claritas ob dispersionem & reflexio-
 nem radiorum adhuc minuenda est in ratione
 $1:nvm = 0,8030$. Unde erit claritas imaginis

primariae post lentem $= 0,02695.\pi$.
 primae anticae - - - $= 0,01652.\pi$
 secundae posterioris $= 0,00195.\pi$
 secundae anterioris $= 0,00015.\pi$
 tertiae posticae - - - $= 0,00001.\pi$
 &c.

Sed

Sed illuminatio directa est

$$= (\sin 16')^2 - - - = 0,00002 \cdot \pi.$$

Unde quatuor imaginum priorum quaelibet illuminatione directa adhuc clarior est.

§. 588. Videmus ergo hinc, utramque Fig. 52.
imaginem primariam G, C parum inter se differre, sequentes vero KLM &c. his vehementer esse obscuriores. Facile vero patet, quam ob rem istae sint ut plurimum inuisibiles, cum ibi sese sistant, ubi lumine, quod in primarias incidit, quodque longe est densius, offunduntur. Ceterum cum istae hoc casu sint valde exiguae, & hoc obstat, quo minus observare istas oculisque subiicere liceat. Utramque vero imaginem primariam parum inter se differre experimentis facile probatur. Caue tamen hinc concludas haud quoque diuersam esse vim uisorialem. Cum enim imago in C sedecies minor sit imagine K, idem erit effectus, ac si lentem adhiberes cuius distantia focalis esset $= \frac{1}{4} CF$, angulo AFC ita imminuto Fig. 46.
ut euaderet (§. 587.)

$$AC^2:AF^2 = c,01652.$$

Dudum vero iam constat, lentes quae sunt segmenta sphaerae minoris, eandem in foco claritatem producentes, minori tamen vi caustica gaudere. Ab experientia plane non abhorre calculum, quem hic pro inuenienda claritate instruximus, sequenti modo exploratum dabo.

EXPERIMENTVM XXIII.

§. 589. Simili modo, quo in experimento Fig. 54.
undeuigesimo (§. 517.) in camera probe ob-

scurata unicam apertam reliqui fenestram,
 quae sit $gG\gamma$, cum caelum nubibus obductum
 esset aequae albidis. Ab ea 15. pedd. receden-
 do in AB collocaui lentem utrinque conue-
 xam eandemque, quam in experimento citato
 adhibui, ita ut axis lentis FG per mediam fe-
 nestram transiret. In $fF\phi$ charta alba exce-
 pi coeli per fenestram spectabilis imaginem,
 ut quanta haec esset viderem. Quo facto re-
 liquas chartae partes resecaui, ut tantum ea
 relinqueretur pars, quae excipiendae imagini
 sufficeret, potiusque minor esset. Similique
 modo in foco anteriore K collocaui chartam
 aequae albidam, neque maiorem quam quae
 capiendae imagini sufficeret. Cum iam ob-
 seruarem imaginem in $f\phi$ aliquantum clario-
 rem esse anteriore in kK , superficiei lentis
 posteriori ADEB successive adplicauit apertu-
 ras minores DE usquedum utraque imago ae-
 que videbatur clara, inuenique proxime fuisse
 $AB: DE = 4:3$.

EXPEIMENTI RATIO ET CAUTELAE.

§. 590. Utramque chartam ϕf , κk areae
 imaginis coaequaui, ne posterior ϕf nimium
 lumen in priorem κk reflecteret, neue prior
 lumen in lentem incidens nimis quam inter-
 ciperet. Illud necessario cauendum est quan-
 tum licet. Hoc vero, etsi lumen interceptum
 utramque claritatem ita minuat, ut salua sit
 ratio inter lumen reflexum & refractum, ni-
 lominus tamen cauendum est, cum difficilius
 exacte dignoscatur aequalitas inter duas cla-
 ritates obscuriores (§. 265. seqq.) Porro quod

in

in omnibus experimentis obseruavi, nisi expresse moneatur contrarium, utraque charta non erat tenuis lumenque transmittens, verum crassior, siue quod aiunt multiplex conglutinata, albissima at minus polita. Opacam enim utramque praecipue vero eam esse debuisse, quam in K collocaui, facile obuium est, cum alias charta K lumen per fenestram in eam incidens ex parte transmisisset, adeoque imaginis claritatem auxisset vel eam potius visui subduxisset. Lumen caeli per fenestram iruens lumini solari vel candelae praetuli, quo imaginem praecipue eam quae in K excipiebatur, maiorem magisque visibilem redderem. Etenim imago solis in k instar puncti fuisset, cuius certe claritas aegre diiudicari potuisset, cum spatium quod in retina oculi occupat ob eandem causam maius sit, quae visionem puncti confusam reddit. Aperturam superficiei lentis posteriori adplicatam, lumen in focum F incidens huiusque imaginis claritatem minuere, imagini vero, quae in K est atque lumini reflexo debetur, non officere, eiusque claritatem saluam atque integram relinquere, vel per se est manifestum. Ceterum cum utriusque imaginis claritas diuerso modo pendeat ab impelluciditate lentis (§ 585.) utique alia adhibita lente alia quoque prodibit ratio inter diametros aperturarum AB, DE. Denique ex superioribus constat, remota apertura DE, claritatem imaginis ϕ auctam iri in ratione areae aperturae DE ad aream aperturae AB, adeoque ut $3^2:4^2=9:16=0,56:1$. Haec vero ratio ab ea, quam

quam ex calculo deduximus, quaeque est $\approx 0,6148:1$ (§ 586.) tantum parte $\frac{1}{4}$ differt.

Fig. 53. §. 591. Lumen quod in focos lenti propiorret K, L, M &c. incidit ibique obiecti imaginem depingit, claritatem primariarum G, C parum auget plurimisque casibus in calculo tuto omitti potest. Vidimus enim lumen in punctum quoduis imaginis K incidens vix esse partem $\frac{1}{3}$ eius, quod coincidit in punctum imaginis G (§. 587.) At insuper mirum in modum debilitatur ob diuergentiam. Ponamus v. gr. focum primum esse in m; huic proximus sit in F, patet ex superioribus lumen in spatium ϕF incidens ita diuergere, ut in toto spatio qn sit disseminatum (§. 544.) Eo ergo erit debilius, quo maior est apertura lentis quoque minor obiecti semidiameter adparens.

Fig. 46. §. 592. Sit haec semidiameter $gCG = \gamma$, erit semidiameter imaginis primariae $= Cm$. tang γ , secundariae $= \frac{1}{3} Cm$. tang γ (§. 583.) Porro ob $CF = \frac{1}{3} Cm = \frac{1}{3} Fm$, erit $mq = 6$. AC. Debilitabitur ergo lumen imaginis F, dum in m peruenit, ut spatium $36. AC^2. \pi$ ad spatium $\frac{1}{49}. Cm^2. tang \gamma^2. \pi = (36.49. AC^2): (Cm^2. tang \gamma^2)$. Est vero AC: Cm tangens semidiametri lentis in m visae adparentis, quae si dicatur $= \omega$, erit debilitatio in ratione

$$= 36.49. tang \omega^2: tang \gamma^2$$

§. 593. Angulus γ fere nunquam est $> 20^\circ$, ponendo ergo tang $\gamma = \frac{1}{3}$, erit debilitatio

$$= 36.9.49. tang. \omega^2: 1$$

Sit iam claritas imaginis primariae $m = 1$, claritas imaginis secundae F erit $\frac{1}{3}$. Haec vero dum in m peruenit, ita debilitatur ut iam sit

$$= \frac{1}{13 \cdot 36 \cdot 9 \cdot 49 \cdot \text{tang. } \omega^2}$$

Quare iam erit claritas imaginis primariae.

$$= 1 + \frac{1}{13 \cdot 36 \cdot 9 \cdot 49 \cdot \text{tang. } \omega^2}$$

594. Quodsi iam ponamus oculum partem trigessimam claritatis qua maior vel minor est non dignoscere, patet esse

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{13 \cdot 36 \cdot 9 \cdot 49 \cdot \text{tang. } \omega^2}$$

unde erit $\text{tang } \omega = 0,003812$
 $\omega = 0^\circ 13'$

Ut adeo hoc casu, quo maxima est semidiameter obiecti adparens, apertura lentis adeo possit esse parua, ut cum in foco videtur, eius semidiameter adparens ad $\frac{1}{4}$ gr. non excurrat. Unde velut infinities minus erit claritatis augmentum, si angulus ω sumatur 10 aut 15 graduum, angulus γ vero ad paucos gradus ascendat. Simili calculo definietur augmentum, quod capit claritas imaginis primariae anterioris, quodque adeo paruum erit, ut casus, quo eius habenda esset ratio, vix detur, cum eius usus sit perexiguus.

§. 595. Ex his, quae haecenus de computanda claritate imaginis, potissimum vero, quae in capite praecedente de illuminatione primariae diximus, haud difficulter colligere licet, qua ratione calculus sit instruendus, ubi lumen per plures lentes successiue refringitur, antequam in imagine, cuius computanda est claritas, coincidit. Rem vero omnem breuissime expedire propositum est. Unde ge-

neralia quaedam praemitemus, atque metho-
dum, qua utendum est in casibus magis com-
positis, uno alteroue exemplo faciliori illu-
strabimus.

Fig. 55.

§. 596. Sint ergo duae lentes ef, EF, ca-
rum axis communis AfFC, obiectum Aa, ima-
go prima Bb, secunda Cc. Haec excipiatur
plano albo atque computanda sit eius clari-
tas. En iam, quae praenotasse iuuabit.

§. 597. Primo animum abstrahemus a lu-
mine ab utraque lente reflexo, & disperso,
cum post calculum institutum facile eius ha-
beri possit ratio.

§. 598. Porro facile obuium est per supra
inuenta dari claritatem imaginis Cc, simulac
assumere liceat, omne lumen, quod in ima-
ginem primam Bb incidit, incidere quoque
in imaginem secundam Cc, quod quidem plu-
rimis casibus obtinet. *Computata enim quanti-
tate radiorum, qui in lentem obiectiuam se incidunt,
quantitas ista, cum tota in Ce incidat, per aream
imaginis Cc erit diuidenda.* Siue quod plane
idem est, *computata claritate imaginis Bb, erit
haec ad claritatem imaginis Cc, in ratione areae
ipsius Cc ad aream ipsius Bb.* Ipse vero com-
putus, si areas imaginum quaeras, ex princi-
piis Dioptrices, si quantitatem radiorum vel
claritatem imaginis Bb spectes, ex iis peten-
dus est, quae in capite praecedenti demon-
strauimus.

§ 599. Haud secus res erit peragenda, si
plures adhibeantur lentes, simul ac euictum
sit, lumen omne in obiectiuam se incidens in
immagine Cc iterum collectum iri. At duplex
fac-

saepius huic hypothese obstat impedimentum, quod vel indicasse sufficiet.

§. 600. Patet enim e puncto dato obiecti a, radios in superficiem vel aperturam lentis obiectivae se incidere per conum luminosum fae, idemque per conum alterum fbe iterum colligi in b, atque in eadem directione in partem posticam iterum diuergere per conum HbI, atque in plano ipsius lentis EF producto coni huius basin esse circulum IKHL. At vero cum ipsa lentis superficies tantum sit circulus EKFL. facile patet, radios e puncto a in lentem se incidentes neque omnes incidere in lentis FE superficiem, neque in totam hanc superficiem sese diffundere. Qui enim in spatium lunulare KHLI incidunt, in imaginem Cc non pertingunt, atque contra ea e puncto b in spatium lentis itidem lunulare KELI radii incidunt plane nulli. Unde manifestum est claritatem puncti c tantum debere radiis, qui in spatium lentiforme KFLI incidunt.

§. 601. Ductis rectis Ebi, Fbh, diametris se, hi describantur circuli flek, ilhk, erunt isti circulis HLIK, FKEL analogi, iisque proportionales, atque radii, qui incidunt in spatium KFLI, ii sunt, qui inciderant in spatium analogum lentis obiectivae lfkh. Horum ergo quantitas per spatium c erit diuidenda, ut habeatur claritas puncti c.

§. 602. Si obiectum ponatur infinite remotum, quantitas ista erit ad quantitatem radiorum in totam lentis superficiem incidentium, ut area spatii lfkh

ad aream aperturæ totius $l f e k$, & claritas c in eadem ratione imminuetur.

§. 603. Si radii emanent e puncto A , quod in axe est, similes existent coni luminosi, at horum basis prima erit circulus $f l e k$ superficiei lentis $f e$ æqualis ipsique concentricus, basis altera erit æqualis circulo $H L I K$, atque lenti $F E$ concentrica. Quoties ergo eius area aream lentis non excedat, omnes radii e puncto A in lentem obiectiuam $f e$ incidentes in eius imaginem C pertingent, huiusque adeo illuminatio erit maxima. Idem quoque obtinebit, quoties circulus $H L I K$ totus cadit in superficiem lentis $F E$.

§. 604. Contra ea si circulus $H I$ maior fuerit superficiei lentis $F E$, ipsique concentricus, idem erit effectus, ac si apertura lentis obiectiuæ $f e$ minuatur, usque dum eua-
dat $H I = F E$. Ponamus obiectum esse $C c$, erit eius imago $A a$, atque cum basis $i l h k$ sit maior superficiei lentis $f e$, patet aperturam lentis obiectiuæ $F E$ posse esse $= H L I K$, atque hoc facto eandem prodire puncti A claritatem, quæ prodit, integra manente apertura $F E$.

§. 605. Simili modo determinatur quantitas radiorum, quæ in datum quoduis imaginis punctum incidit, cum plures interponuntur lentes.

Fig. 56.

§. 606. Ut iam dicta exemplo illustremus, sint duæ lentes $F E$, $f e$, axis communis $A C$, obiectum C , imago prima B , secunda A , atque huius quaerenda sit claritas centralis. Quod ut fiat, sit.

di-

distancia focalis lentis $FE = \phi$.

lentis $fe = f$

distancia obiecti $CD = \delta$

distancia lentium $dD = \epsilon$

erit per principia dioptrica

$$DB = \frac{\delta\phi}{\delta - \phi}$$

unde

$$Bd = \frac{\epsilon(\delta - \phi) - \delta\phi}{\delta - \phi}$$

$$Ad = \frac{Bd \cdot f}{Bd - f} = \frac{f\epsilon(\delta - \phi) - f\phi\delta}{(\epsilon - f)(\delta - \phi) - \delta\phi}$$

§. 607. Sint iam radii CF, CE tales, ut per lentem FE refracti in limbum lentis ef incidant, patet, quantitatem radiorum imaginem A collustrantium contineri intra conum FCE. Dicatur ergo $DF = a$, $de = b$, erit

$$b : a = dB : BD = [\epsilon(\delta - \phi) - \delta\phi] : \delta\phi$$

qua ergo aequatione apertura alterutrius lentis per aream alterius definitur.

§. 608. Cum vero quaeratur illuminatio centralis, concipiamus in Cc spatiolum infinite paruum, cuius semidiameter Cc sit $= 1$, erit eius area $= \pi$, unde

$$\text{area imaginis primae } Bb = \frac{\pi \cdot DB^2}{DC^2} = \frac{\pi \cdot \phi^2}{(\delta - \phi)^2}$$

$$\text{area imaginis secundae } Aa = \frac{\pi DB^2 \cdot Ad^2}{DC^2 \cdot dB^2}$$

$$\text{siue} = \frac{\pi \phi^2 f^2}{[(\epsilon - f)(\delta - \phi) - \delta\phi]^2}$$

§. 609.

§. 609. Dicatur porro quantitas radiorum in FE incidentium $= q$, claritas imaginis Aa $= \lambda$, erit (§. 222.)

$$q = \frac{\pi \pi \cdot FD^2}{FC^2} = \frac{\pi \pi a^2}{a^2 + \delta^2}$$

Unde ergo

$$\eta = \frac{\pi a^2 \cdot [(\xi - f) \cdot (\delta - \phi) - \delta \phi]^2}{(a^2 + \delta^2) \phi^2 f^2}$$

sive

$$\eta = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot [(\xi - f - \phi) \delta - (\xi - f) \phi]^2}{(a^2 + \delta^2) \phi^2 f^2}$$

§. 610. Quodsi distantia obiecti fuerit velut infinita, formula haec abit in sequentem

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\xi - f - \phi)^2}{\phi^2 f^2}$$

Hanc iam duobus exemplis illustrabimus.

EXEMPLVM I.

§. 611. Sit FE lens obiectiua, se ocularis tubi astronomici, quo in camera obscura excipiat imago solis, atque quaerenda sit eius claritas centralis. Ponamus distantiam focalem lentis obiectiuae $= 6' = 72''$, lentis ocularis $= \frac{3}{2}''$, aperturae FD semidiametrum $= \frac{3}{2}''$. erit

$$\phi = 72''$$

$$f = \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

Quodsi iam excipienda sit imago ad distantiam $2' = 24''$, erit Ad $= 24'$, unde ob

$$dB = \frac{Ad \cdot f}{Ad - f}$$

erit

per plures lentes refracto, vel ab eadem lente &c. 285

erit

$$dB = \frac{24 \cdot \frac{3}{2}}{24 - \frac{3}{2}} = \frac{8''}{2}$$

Quare ob

$$BD = \phi = 72''$$

erit

$$dD = \epsilon = 72 + \frac{8}{2}$$

$$(\epsilon - f\phi) = 72 + \frac{8}{2} - \frac{3}{2} - 72 = \frac{1}{10}''$$

adeoque

$$\eta = \frac{\pi \cdot a^2 (\epsilon - f - \phi)^2}{f^2 \phi^2} = \pi \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{72}^2 \cdot \frac{4}{9}$$

sive

$$\eta = \frac{\pi}{518400} = 0,000001929 \cdot \pi.$$

Sed illuminatio directa est $= \pi (\sin \frac{1}{4}^\circ)^2 =$

$$0,000021662 \pi$$

Quare hoc casu charta, in quam radii solares directe incidunt, undecies clarior erit imagine, ope istius tubi in cameram obscuram proiectae. Claritas centralis imaginis primae Bb erit $= \pi \cdot \text{tang } FBD^2 (\S. 500. 501.)$ adeoque ducentes $= \pi \cdot (\frac{3}{2})^2 : 72^2 = 0,0004321 \cdot \pi$, vicies maior illuminatione directa, & ducentes maior claritate imaginis secundae aA.

EXEMPLUM II.

§. 612. Lens FE sit vere caustica atque maioris sphaerae segmentum. Radii solares in eam incidentes excipiantur lente collectiva, ut eo magis condensentur. Hoc casu lens fe & focus secundus A lenti obiectivae propior est, quam focus primus B, ut in fig. 57.

Po.

Fig. 57. Ponamus iam esse

$$a = FD = 1'$$

$$\phi = DB = 8$$

$$b = fd = \frac{1}{4}$$

$$f = 1$$

atque quaeramus lentis *fe* situm talem, ut omnes radios excipiat. Erit ergo

$$Bd:df = BD:DF$$

adeoque

$$Bd = \frac{df \cdot BD}{DF} = 2'$$

unde

$$\epsilon = BD = 6.$$

His iam valoribus substitutis, erit

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\epsilon - \phi - f)^2}{f^2 \phi^2} = \frac{9\pi}{64} = 0,140625 \cdot \pi$$

$$\text{Sed claritas imaginis primae B est} = \frac{\pi}{64} = 0,015625 \cdot \pi$$

$$\text{Et illuminatio directa} = \pi (\sin \frac{1}{4}^\circ)^2 = 0,00002166 \cdot \pi$$

$$\text{Illuminatio absoluta} = \pi.$$

Est ergo claritas imaginis A fere septima pars illuminationis absolutae.

§. 613. Omnes istae quantitates minuendae sunt in ea ratione, qua lumen ab utraque lente reflectitur atque dispergitur. Haec vero facile determinatur per experimentum XIX. Sit ergo decrementum istud pro lente $FE = 1:n$, pro lente *fe* $1:m$, facile patet claritatem imaginis primae B minuendam esse ut 1 ad *n*, & claritatem imaginis secundae A de-

cres.

crescere in ratione composita $1:nm$. Similique modo si plures adhibeantur lentes, atque earum impelluciditas sit n, m, p, q, r &c claritas ultimae imaginis decrescet in ratione composita $= 1:n.m.p.q.r.$ &c. Patet vero ex superioribus, has literas pro vitris mediocriter pellucidis esse fere $= \frac{6}{7}$ siue $\frac{5}{6}$, ut adeo si plures adhibeantur lentes, claritas imaginum notabiliter decrescat. At cum singula vitra peculiari si bique propria gaudeant impelluciditate, praestant rationes istas experimentis definire. Methodum vero, qua uti licet, iam supra

(§. 517. seqq.) descripsimus.



PHO.

PHOTOMETRIAE

PARS III.

QVA EXPERIMENTIS ET CALCULO
PER LVSTRANTVRLVMINIS MODIFICATIONES
A CORPORIBVS OPACIS
PENDENTES.

CAPVT I.

De lumine a superficiebus corporum opacorum politis, potissimum a speculis reflexo, huiusque mensura & gradibus.

§. 614.

EXperientia constat, superficies omnium corporum vel iam esse vel denique fieri posse ita politas, ut lumen plus minusue reflectant. Sic v. gr. superficies fluidorum vel sua sponte ad reflectendam certam luminis quantitatem apta sunt. Vitrum, metalla, ceteraque corpora, quae igni admota liquefcunt fusione politam induunt superficiem, quae ipsis dum iterum ab igne remota durefcunt, eate- nus manet, quatenus nullae inhaerent scoriae vel nulla superueniat aerugo. Huc quoque referas gemmas & salia, quae chrySTALLIFICATIONE regularem eaque politam adipiscuntur figuram & superficiem. Eadem quoque induitur me-
tallis,

tallis, lapidibus, lignis ceterisque corporibus solidis, quum debite poliuntur.

§. 615. Ea vero corpora minus esse polita, quarum superficies scatent particulis plus minusue asperis atque proeminentibus, in vulgus notum est, atque oculis microscopio armatis ita patet, ut & eae, in quibus, cum nudus est nullum detegere valet asperitatis & cruditatis vestigium, agri sulcati instar videantur inaequabiles. Unde dudum iam rerum naturalium observatores superficiem corporis planissimi eo modo planam esse statuerunt, quo tellus sphaerica dicitur. Utrumque enim hoc placitum a rigore geometrico abhorret.

§. 616. Etsi ergo superficies absolute plana in rerum natura vix existat, eatenus tamen ad eam accedere licet, ut quae superest asperitas sit paruitatis contemnendae. Hoc vero perfici constat, cum particulae eminentes vel abraduntur, vel deprimuntur. Posteriori modo chartam & pannos linteos & xylinos laeuigari neminem latet. Plerumque utroque opus est modo.

§. 617. Porro ostendit NEWTONVS corpora opaca densissima pellucida euadere simulac in lamellas tenuissimas distendantur, ut ad eo hinc analogia quaedam inter corpora opaca & diaphana consequi videatur. Constat experientia vitrum crassius minus esse transparent, & dari terminum crassitiei, sub quo transparentia ista vel plane evanescat, vel saltem sensum visus effugiat. Ut vero terminus iste eo est arctior, quo maior est opacitatis

T

gra-

gradus, ita eundem & in opacissimis corporibus obtinere, dubio caret. Unica haec aderit diversitas, ut eo minor sit lamellae lumen transmittentis crassities, quo maior est impelluciditatis gradus. An vero detur casus, quo crassities ista plane evanescat, experimentis haud constat. Aurum certe corpus omnium densissimum, cum in bracteolam tenuissimam distensum est, lumen transmittit.

§. 618. Similiter experientia constat, vitrum, aquam, aerem plurimaeque corpora diaphana, etsi lumen fere omne transmittant, lumine colorato, viridi nempe & caeruleo esse conspicua, quod a particulis interioribus reflectitur, atque eo densius est, quo magis particulae istae a superficie distant, quoque longior est via, quam lumen in corpore isto percurrere debet antequam ad superficiem pertingat.

§. 619. Eodem modo dantur corpora diaphana, quae lumen alio colore gaudens antrosum reflectunt, aliud vero retrorsum transmittunt. Hanc esse indolem aquae ligno nephritico tinctae abunde constat.

Fig. 58. §. 620. At mea quidem sententia nil impedit, quo minus hinc inferamus: *Eodem modo corpora opaca omnia colorata videri, quo vitrum crassius videtur viride, & colorem istum non modo ab iis proficisci particulis, quae in superficie sunt sitae, verum & ab iis, quae intra eam sunt.* Sit enim AB superficies corporis ABED. In hac concipiatur lamella ABba talis, ut si pars inferior abED abesset, lumen ista transmitteret. Utique evidenter est, particulas lamellae ABba omnes, lumen,

men, quod in eas incidit ita reflectere, ut eius pars quaedam non modo superiora petat, verum & iterum per superficiem AB in aerem retrogrediatur. Quodsi vero iam ea sit particularum istarum indoles ut nonnisi lumen coloratum, flauum v.gr. reflectant, corpus ABED flauum videbitur, & color iste omnibus particulis, quae lamellam ABba constituunt iunctim debebitur. Quatenus enim transparentis est lamella ista, eatenus lumen a cunctis istis particulis reflexum in oculos incidet.

§. 621. Cumque particulae istae lumen incidens dispergant, consequens est, & *hi obtinere angulum emanationis (§.80.) atque quantitatem luminis colorati oblique emanantis decrescere in ratione sinus anguli emanationis (§. 81.)* Lumen enim istud, etsi mutuatum sit, nilominus spectare licet, quasi corpori opaco proprium esset. Experimenta vero quibus veritas huius positionis a posteriori, quod aiunt, adstruitur, infra occurrent.

§. 622. Quodsi iam ea, quae haecenus descriuimus, veluti in summam contrahamus, patebit, triplicem in corporibus opacis spectandam esse luminis partitionem. Sit AB superficies corporis colorati eaque quantumlibet polita. Lumen in eam incidat secundum directionem LC, pars eius, quam primam dicemus reflectetur secundum directionem CR, ita ut angulus reflexionis RC sit angulo incidentiae aequalis. Pars altera, quae ut plurimum perexigua est, ea nobis erit, quae in superficie C a particulis heterogeneis minusque planis quaquauersum dispergitur (§ 323.

331.) Tertia denique, quae reliqua est, corpus ipsum ingreditur, atque a particulis, quae lamellam ABba constituunt ex parte reflectitur. Hoc vero lumen coloratum est illud, de quo iam sermo nobis fuit (§. 620. seqq.)

§. 623. Partem primam, siue lumen omne quod secundum directionem CR reflectitur, quodque adeo superficiei AB debetur, quatenus haec polita est & laeuigata, *lumen reflexum* vocabimus, atque de hoc valent cuncta ea quae in Catoptica de reflexione luminis demonstrantur. Pars altera, quae pendet ab asperitate superficiei & a particulis heterogeneis, *lumen dispersum* dicemus, quippe reuera in omnes partes dispergitur. Tertia quae e lamella ABbc iterum egreditur, atque quaquaversum emanat, corpusque suo colore spectandum sistit, *lumen emanans*, vel *coloratum* dicemus. (§. 40. 621.) His denique quartam accensere licebit, quae lumen omne istud complectitur, quod in ipso corpore dispergitur, cuiusque quantitas admodum est notabilis, plurimisque casibus ceteras tres partes iunctim sumtas longe excedit. Hoc ergo lumen, cum a corpore absorbeatur, *amissum* vocabimus.

§. 624. Priores tres partes saepissime confunduntur. Quodsi enim oculus sit in recta R atque intueatur superficiem C, una videbit lumen reflexum, dispersum & coloratum. Dispersum vero & coloratum reflexo offunditur & offuscatur, simul ac superficies AB fuerit admodum polita, ipsiusque vis reflectens vehementer notabilis. Hoc casu *speculum* erit, eius saltem vicem sustinet. Etsi ve-

ro vis reflectens longe fuerit minor, lumen coloratum vero intensius, nihilominus idem obtinebit, quoties angulus RCA paucos gradus non excedit. Hocque casu lignum, marmor nigerrimum, aliaque huiuscemodi corpora, si debite poliantur, instar speculi ita lumen reflectent, ut lumen coloratum fere abesse videatur.

§. 625. Secus vero haec erunt, cum oculus non est in recta R, verum in alio quouis loco O. Hoc enim casu lumen reflexum CR ab eo plane recedit, ut adeo nonnisi lumen dispersum & coloratum videat. Utrumque enim constanter confunditur, quippe utrumque quaquauersum diffunditur.

§. 626. Alio porro modo confunditur lumen reflexum & dispersum. Quodsi enim superficies ita fuerit minus polita, ut supersint particulae eminentiores non abraasae & cavitates vel sulci non expleti, ab his lumen secundum multifarias directiones reflectetur. At vero lumini secundum directionem RC reflexi accenseri nequit, potius cum lumine quacunque demum ex causa disperso confunditur. Eiusmodi vero particulas & cavitates eatenus heterogeneas vocare utique licebit, quatenus superficiem corporis, quae perfecte plana esse deberet, inaequabilem & asperiores reddunt. Per se vero patet, lumen hoc, quod disperso iam adnumeratur, reflexo detrahi, ut adeo huius quantitas minuat, dum quantitas illius augetur.

§. 627. Ut vero infiniti dantur asperitatis gradus, ita & infinitis modis lumen reflexum

disperſo miſcetur. Ita v. gr. quantumvis aſpera & cruda ſit ſuperficies AB, ſemper adhuc aderit pars quaedam luminis, quae ita reflectitur, ut ſecundum directionem CR ipſique proxime parallelam maiori copia pergat. Contra ea nulla dabitur ſuperficies ita polita, quae nullum plane lumen diſpergat.

§. 268. His ita praemiſſis iam inquiremus in quantitatem luminis reflexi, quod nempe a ſuperficie corporis, quatenus haec laeuigata eſt & polita, ſecundum eandem directionem CR repercutitur. Vidimus vero differentiam inter corpora diaphana & opaca ad hoc reduci poſſe, ut craſſities Cc lamellae ABba eo maior aſſumenda ſit, quo maior eſt pelluciditatis gradus. Ut enim vix datur corpus ita diaphanum, quod nullum lumen diſpergat, ita quoque vix dabitur eiſmodi corpus opacum, in quod nullum plane lumen ingrediatur, ſive in quo craſſities Cc ſit = 0. Equidem non me fugit vitrum, chryſtallos ceteraque ſolida diaphana, cum diſfringuntur, nilominus & ſuperficies partium diſfractarum quantumvis inaequales ſint, politas tamen eſſe, lumenque reflectere; contra ea ſecus haec eſſe, ſi diſfringantur lapides quam plurimi opaciores & crudiores, quippe qui lumen omne diſpergunt, nullumque reflectunt, niſi data opera laeuigentur, atque ad reflectendum lumen aptiora reddantur. Hoc tamen diſcrimen pelluciditatem lamellae ABba, quantumvis iſta ſit exigua, non tollit, neque lumini ingreſſum intra corpus denegat. Inſuper lamella iſta eandem affectat inaequabilitatem
quam

quam ipsa superficies habet, cum est asperior, atque a perfecta planitie plus minusue recedit. Unde in posteriori casu laeuigatione ad planitiem istam est perducenda.

§. 629. Hac vero analogia inter corpora diaphana & opaca admissa, eodem modo lumen a corporibus opacis iisque politis reflexum computabitur, quo in superioribus pro computanda quantitate eius quod a vitro reflectitur, usi sumus, siue ut rectius dicam, eadem in utroque casu occurrit calculi difficultas, si hunc ex theoria luminis deducere uolueris. At vero cum theoria ista adhucdum eo usque non sit promota, id agemus, ut ostendamus, formulas, quas supra pro definiendo lumine a vitro reflexo, inuenimus quasque ab experimentis haud ita multum aberrare vidimus, & hic adhiberi posse.

§. 630 Jam enim experimento VIII. (§. 328.) edocti sumus, corporis opacitatem reflexioni luminis non officere, cum eadem sit eius quantitas a superficie aquae limpidissimae & atramenti nigerrimi reflexa. Ultramque ergo eodem absolui calculo vel sua sponte patet.

§. 631. Porro viam luminis prope superficiem corporis opaci curuilineam statuere haud ambigo. Vires enim, quae lumen, dum in corpora diaphana incidit, refringunt, corporibus opacis denegari haud posse censeo, etsi hoc casu lumen nimis intercipiatur, quam ut recta pergere possit. Exempli loco erit aqua, cum iniecto colore continuo magis inspissatur. Particulae iniectae pallatim maiorem luminis refracti quantitatem intercipiunt,

at illud, quod non intercipitur per eandem viam pergit, per quam incedebat, cum integra adhuc erat aquae pelluciditas. Idem & ratione vitri colorati obtinere me non momento patet. Et quamcunque demum huius rei quaeras causam, eandem & in corporibus opacis lumen haud secus a recto tramite deflectere facile deprehendes, simulac diuersam esse densitatem istius corporis a densitate medii ambientis assumas.

Fig. 43.

§. 632. Supra iam posuimus vires refringentes viam luminis ante eius incidentiam in superficiem media dirimentem incuruare, acque in eodem spatio FA, in quo a prima directione EF deflectitur, successiuam contingere eius reflexionem. Quod cum similiter locum habeat, ubi corpus fuerit opacum, consequens est eodem ratiocinio & pro his corporibus erutum iri formulam, quam in Parte IIa pro definiendo lumine a superficie vitri reflexo invenimus, quaeque adeo, quantumvis precaria sit nilominus experimentis proxime satisfaciet. Dicto igitur lumine incidente $\equiv i$, lumen reflexum vocetur q , atque pro corporibus quibuscunque, quorum superficies polita est, lumenque reflectit, habebitur

$$-\log(1 - q) = z \cdot \sec HFE \cdot \sec \gamma$$

 Quod si ergo pro dato quodam angulo HFE $\equiv \gamma$ definiatur quantitas q , dabitur quoque q pro quolibet alio angulo γ , dummodo gradus 80 non excedat.

§ 633. Si lumen normaliter incidat, erit $\gamma = 0$, $\sec \gamma = 1$. unde

$$-\log(1 - q) = z$$

Est

Est ergo $\kappa \log$. luminis residui, dum rectam FG percurrit, quodque adeo in ipsam superficiem corporis incidit.

§. 634. Ponamus iam angulum inclinationis $HFE = \gamma$ esse paucorum graduum, atque ponatur $\sec \gamma^2 = 1 + \mu$, erit

$$-\log(1 - q) = \kappa(1 + \mu)$$

sive ponendo $\log e = 1$.

$$1 - q = e^{-\kappa(1 + \mu)} = e^{-\kappa} \cdot e^{-\kappa\mu}$$

adeoque

$$1 - q = e^{-\kappa} \left(1 - \kappa\mu + \frac{1}{2}\kappa^2\mu^2 - \frac{1}{6}\kappa^3\mu^3 + \&c \right)$$

Haec series cum vehementer conuergat, ut plurimum primus terminus sufficit, quandoque secundus quoque retinendus est. Cum enim sub angulo recto quantitas q fere semper deprehendatur $< \frac{1}{2}$, patet fore $\kappa < \log 2$ sive $< 0,7$. Ponendo quoque angulum γ ultra 12 gr. non excurrere, erit $\mu < \frac{1}{20}$, quare $\kappa\mu < \frac{1}{30}$. Fiat ergo $\kappa\mu = \frac{1}{30}$, erit

$$1 - q = e^{-0,7} \left(1 - \frac{1}{30} + \frac{1}{1800} - \frac{1}{162000} + \&c \right)$$

Unde tuto omittuntur termini secundum sequentes, plurimisque casibus & ipse secundus omitti poterit, nisi & in minutiis calculum prosequi necessarium ducas.

§. 635. Quodsi ergo primus tantum retineatur terminus, facilius erit computus pro lumine a speculis uisoriis reflexo, quippe in his angulus γ ad 12. gr. rarius excurrit.

§. 636. Corpora opaca lumen reflectentia in quasdam classes uniuersaliores dispescere licet. Fluida enim quorum grauitas specifica a grauitate aquae parum differt, eadem fere

gaudent vi reflectente, quae in minutiis tantum discrepabit, ab oculo vix discernendis. Porro marmor, filices, chryſtalli, lapidesque quam plurimi, qui fusione facile colliqueſcunt atque vitrificantur ratione virium reflectentium, ſi debite poliantur, a vitro parum discrebabit. Ad tertiam classem referas metalla, potiffimum hydrargyrum, cuprum, orichalcum, chalybs, ferrum, ſtannum & quae ex his pro conficiendis ſpeculis opticis componuntur. His longe maior eſt vis reflectens, quam vitro, lapidibus atque fluidis aquae analogis. Unde pro ſpeculis conficiendis fere ſola adhibentur.

§. 637. Ut iam ad ſpecialiora deueniamus, primo aſſumemus dari ſpecula, quae omne lumen reflectant, atque calculo definiemus, quantitatem reflexi. Eſſi enim eiſmodi ſpecula non dentur, in eorum tamen ſymptomata inquiſuiſſe iuuabit, cum hac ratione calculus praeftruatur, qui facilior eſt, atque hoc abſoluto vel experimentis vel calculo quoque aſſequi licebit, quanam ratione minuenda ſit luminis reflexi quantitas, ſi vis reflectens minor fuerit.

Fig. 59. §. 638. Sit ergo AB ſpeculum planum perfecte reflectens. in quod incidant radii CA, CB e puncto radiante C emanantes. Reflexi AD, BE excipiantur plano DE. Conſtat iam ex catoptriciſ, angulos reflexionis DAL, EBL eſſe angulis incidentiae CAK, CBK aequales, atque radios DA, EB productos coincidere in puncto F catheti incidentiae CKF.

§. 639.

§. 639. Quae cum ita se habeant, facile patet : eandem fore plani DE illuminationem, si punctum radians C, sublato speculo, transferatur in F, siue in locum imaginis ipsius puncti C. Hoc enim facto, singuli radii AC, BC transferuntur in partem auersam, AF BF, ut directe in planum DE incidant, cum antea per reflexionem inciderent.

§. 640. Similiter manente puncto radiante in C producantur radii CA, CB in G & H, fiat $AG = AD$, $BH = BE$. Quod si iam sublato speculo planum DE transferatur in GH, eadem iterum erit eius illuminatio. Hoc enim si fiat, radii reflexi mutantur in directos, eodem modo eademque copia in planum GH incidentes.

§. 641. Utraque haec positio cum obtineat, quaecumque sit puncti radiantis C planique DE ratione ipsius speculi AB positio, facile patet veras quoque eas fore, si in vicem puncti C substituatur obiectum luminosum quodcunque. Eodem enim modo speculo AB obuertitur eius imago, quo ipsum obiectum ipsi obuersum est. Ut adeo hoc modo computus illuminationis, quae fit per radios a speculo plano reflexos ad computum illuminationis directae, quam supra (P. I. C. II.) fusius pertractauimus, eatenus reducatur, quatenus assumere licebit, speculum planum radios omnes, aut saltem sub quolibet angulo incidentiae aequabiliter reflectere. Ea enim prodibit illuminatio, quae obtineret, si remoto speculo obiectum ipsum in locum imaginis substitueretur, atque posteriori casu obiecti substituti claritas in ea ratione minueretur, in qua lumen a speculo reflexum debilitatur. Hac positione in

variis experimentis supra descriptis (§. 59. 63. 256. 260) usi sumus.

§ 642. Ut ergo in euolueudo hoc casu, quo specula plana esse statuuntur, breuissimis esse licuit, ita in peruestigando lumine a speculis sphaericis reflexo uberiores erimus, atque primo ea considerabimus, quae conuexa sunt, eaque iterum ponemus esse perfecte reflectentia (§. 637.) Etsi vero pluribus modis res ista ad liquidum perducı possit, sequenti potissimum utemur, quo pateat, qua ratione instituendus sit computus *luminis linearis*, quoque modo ex isto deducatur luminis quantitas, cum a superficie in longum & latum extensa excipitur.

Fig. 60. & 61. §. 643. Sit ergo L punctum radians, AQNM speculum sphaericum conuexum. Ducatur LCB atque maioris perspicuitatis ergo vocetur A polus, eritque AMNQ meridianus. Sit porro $A\mu B$ alius meridianus priori infinite vicinus, $M\mu$ pars circuli aequatori paralleli, siue cuius polus sit itidem A. Incidant iam radii ex L in partem meridiani Mm & paralleli $M\mu$, patet eos ob diuersam utriusque curuedinem ita reflexum iri, quasi priores emanarent e puncto R, posteriores e puncto P, ut adeo aliter diuergant, qui in meridianum incidunt, aliterque ii qui incidunt in parallelum. Puncta R, P per principia Catoptrices facile determinabuntur sequentem in modum.

§. 644. Per centrum sphaerae, C & punctum M agatur recta cMD, fiatque angulus $KMD = DML$, erit MK via radii reflexi, quae pro-

producatur in Q. Simili modo per m ducatur Hmq, eritque R punctum intersectionis, ex quo radii in Mm incidentes diuergunt.

§. 645. Productis porro LM, Ln in N, n, erit

$$Nn = \frac{LN \cdot Mm}{LM}$$

$$MN = MQ$$

$$nm = mq$$

$$mq = mn = MN - Mm - Nn$$

$$Qq = MQ - mq + mM$$

unde $Qq = 2mM + Nn = \left(2 + \frac{LN}{LM}\right) \cdot Mm.$

Sed est

$$MR : RQ = Mm : Qq$$

unde

$$MR : RQ = 1 : \left(2 + \frac{LN}{LM}\right)$$

$$MR : MQ = 1 : \left(3 + \frac{LN}{LM}\right)$$

Sed

$$LN = \frac{LB \cdot LA}{LM}$$

hinc

$$MR : MQ = 1 : \left(3 + \frac{LB \cdot LA}{LM^2}\right)$$

Porro est

$$MN = MQ = LN - LM$$

unde

$$MQ = \frac{LB \cdot AL - LM^2}{LM}$$

quare

quare tandem

$$MR = \frac{LM.(LA.LB - LM^2)}{(LA.LB + 3LM^2)}$$

§. 646. Porro demisso sinu MS, erit

$$CMP = DMK = DML$$

$$DML = MCL + MLC$$

unde

$$CMP = MCL + MLC$$

$$MPL = 2MCL + MLC$$

Est vero

$$MS = CM.\sin MCL = MP.\sin MPL$$

adeoque

$$MP = \frac{MC.\sin MCL}{\sin(2MCL + MLC)}$$

§. 647. Dicto iam radio $CM = 1$, $CL = a$,
arcu $AM = v$, habebitur

$$LM = \sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}$$

$$\sin CLM = \sin v:LM$$

$$\cos CLM = (a - \cos v):LM$$

$$\sin MPL = \frac{a\sin 2v - \sin v}{\sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}}$$

$$MP = \frac{\sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}}{2a\cos v - 1}$$

$$MR = \frac{(a\cos v - 1).\sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}}{2a^2 - 3a\cos v + 1.}$$

§. 648. Si punctum radians L fuerit infinite remotum, erit $a = \infty$, unde brevissime fiet

$$MP = CP = \frac{1}{2}\sec v$$

$$MR = \frac{1}{2}\cos v$$

adeoque

$$MP.MR = \frac{1}{4}$$

§. 649.

§. 649. Lumen quod in meridiani elemen-
tum Mm incidit ita reflectitur, ac si emana-
ret e puncto R. Ad rectas mp, mL agantur
normales vel arculi Mh, Mg, triangula Mmh,
Mmg ob communem hypotenusam & legem
reflexionis erunt aequalia & similia, adeoque
 $Mh = Mg$. Quare densitas in Mh & Mg erit
eadem, dicatur ergo $= D$. Sit porro pla-
num HK, lK ad directionem radiorum nor-
male, atque densitas luminis in HK ponatur
 $= \delta$, erit

$$D:\delta = RK:RH$$

$$\delta = \frac{D.RH}{RK}$$

Quae ergo est densitas luminis linearis in HK,
quod a meridiani elemento Mm reflectitur.

§. 650. Ut vero & ea quaeratur, quae de-
betur elemento paralleli M μ , quae sit $= d$, re-
cordandum, lumen ita reflecti, quasi emana-
ret e puncto axis P. Dicta ergo iterum den-
sitate eius, quod in M μ incidit $= D$, patet
fore

$$D:d = PK:PM$$

adeoque

$$d = \frac{PM.D}{PK}$$

Quare componendo habetur vera illumi-
natio

$$\eta = d\delta = \frac{PM.RM.D^2}{PK.RK}$$

sive substitutis valoribus ante repertis

$$\eta = d\delta = \frac{((a^3 + 3a)\cos v - a^2(1 + 2\cos v^2) - 1)D^2}{((4a^3 + 5a)\cos v - a^2(2 + 6\cos v^2) - 1)PK.RK}$$

§. 651.

§. 651. Sed densitas D^2 est variabilis, cum pendeat a distantia LM, quare dicta densitate in $C = \Delta$, erit

$$D^2 = 1:LM^2 = \frac{aa.\Delta}{a^2 - 2acofv + 1}$$

Quare

$$\eta = d\delta = \frac{(a^3 cofv + 3acofv - a^2 - 2a^2 cefv^2 - 1)}{(4a^3 y - 2a^2 - 6a^2 cofv + 5acofv - 1)} \cdot \frac{a^2 \Delta}{(a - cofv)^2 . PK . RK}$$

§. 652. Prolixae hae formulae mirum in modum contrahuntur, si distantia puncti radiantis L ponatur velut infinita. Erit enim hoc casu $a = \infty$, unde

$$\eta = d\delta = \frac{\Delta}{4 . PK . RK}$$

Cumque hoc casu sit

$$MR = \frac{1}{2} cofv.$$

$$PM = \frac{1}{2} secv$$

erit

$$PK . RK = (MK + \frac{1}{2} secv) . (MK + \frac{1}{2} cofv)$$

adeoque

$$\eta = d\delta = \frac{\Delta}{4MK^2 + 2MK(secv + cofv) + 1}$$

§. 653. Quodsi insuper planum KH ratione ipsius diametri AB, assumi possit ceu infinite remotum, quod facere licebit, simulac AB respectu distantiae MK fuerit velut infinite parva, erit hoc casu

$$PK = RK$$

adeo.

adeoque illuminatio plani KH decrescet in ratione reciproca duplicata distantiae, atque ab angulis incidentiae siue arcu AM fere erit independens, cum ultima formula abeat in sequentem

$$\eta = d\delta = \frac{\Delta}{PK^2}$$

§. 654. Plane vero illuminatio ab arcu AM libera erit, quoties sec ν fuerit velut infinite parua ratione distantiae MK. Quo ergo casu sphaera AQN erit instar puncti radiantis, atque illuminatio, quae inde prouenit, reciproce erit ut quadratum distantiae

§. 655. Ceteris casibus, quibus angulus ν adeo parum a recto differt, ut sec ν euadat fere infinita, adeoque ad distantiam plani MK utcunque magnam, notabilem habeat rationem, secundus terminus denominatoris fractionis

$$\eta = \frac{\Delta}{4MK^2 + 2MK(\sec \nu + \cos \nu) + 1}$$

abicit nequit, sed erit

$$\eta = \frac{\Delta}{4MK^2 + 2MK \sec \nu}$$

& si hoc casu, quo angulus ν a recto vix differt, distantia MK fuerit valde parua, & secante ipsius ν velut infinite minor, fiet

$$\eta = \Delta : 2MK \sec \nu.$$

§. 656. Ceterum vel per se patet, Δ esse illuminationem directam plani in C, si puncto radianti L directe obuertatur, similiterque claritatem planam η haberi si claritas vel densitas radiorum linearis in KH per eam quae est in M μ multiplicetur, ut sit

$$\eta = d\delta.$$

U

§. 657.

Fig 62. §. 657. Eundem hunc casum pro lumine L infinite remoto iam sequentem in modum peruestigabimus. Sit $LDKC$ speculum sphaericum perfecte reflectens in hoc incidat lumen secundum directionem LK , ut LK sit axis, L vertex, CED horizon. Planum circuli sphaerae maximi AEB concipiatur infinite extensum, atque ad directionem luminis utcumque inclinatum, atque quaerenda iam sit quantitas radiorum a speculo in hoc planum reflexorum.

§. 658. Per se vero patet radios extremos, qui in planum hoc incidunt ipsi plano esse parallelos. Ponamus ergo radios istos eos esse, qui secundum directionem cunctis communem LK incidunt in curvam $GHNF$ in ipsa sphaerae superficie construendam. Sit arcus DB plani AEB supra horizontem CED elevatio. E vertice L demissus concipiatur verticalis quicunque $LNMK$, atque haud difficulter demonstrabitur esse debere $LN = NM$. Ducta enim recta QM e centro sphaerae Q per punctum aequatoris M , evidens est, radium secundum directionem ipsi LQ parallelam in N incidentem reflecti debere secundum directionem rectae QM parallelam, quippe eum inter extremos referimus. Hoc vero ut fiat, debet esse $LN = NM$.

§. 659. Quodsi ergo in singulis verticalibus bifariam secentur distantiae LB , LM , LC punctorum aequatoris B , M , C a vertice L , haud difficulter construatur curva GHF .

§. 660. Concipiantur iam duo plana infinite extensa RST , VWX plano aequatoris AEB

AEB parallela facile patet omnes radios in hemisphaerium LCED incidentes ita diuidi, ut qui incidunt in spatium LGHF reflectantur in planum superius RT, ceterique, qui incidunt in partem residuam GHFDC cadant in planum inferius VWX.

§. 661. Porro si e singulis punctis curuae GHF in planum horizontis CED demittantur perpendiculares, hae in isto plano abscindent curuam, cuius adplicatae e centro Q computatae erunt sinus arcuum LF, LN, LG, atque huius curuae area quantitati radiorum sursum reflexorum erit proportionalis. Quae omnia vel inde patent, quod directio cunctorum radiorum posita sit ipsi LK parallela, siue ad planum horizontis normalis. Simili modo dabitur quantitas radiorum in triangulum quodlibet LFN incidentium per aream huius trianguli in planum horizontis proiecti.

§. 662. Circulo verticali LNK ductus sit infinite vicinus Lnmk, atque fiat quantitas radiorum in elementum NLn incidentium $d\lambda$, sitque

$$\text{arcus LF} = \frac{1}{2} \text{LB} = \omega$$

$$\text{arcus LN} = \frac{1}{2} \text{LM} = \nu$$

$$\text{angulus BLM} = \text{PD} = \xi$$

$$\text{semidiameter sphaerae LQ} = r.$$

erit area elementi NLn in planum horizontis proiecti $= \frac{1}{2} \sin \nu^2 . d\xi$, adeoque

$$d\lambda = \frac{1}{2} \sin \nu^2 d\xi$$

unde fit

$$4d\lambda = (1 - \cos 2\nu) d\xi$$

§. 663. Est vero $(1 - \cos 2v) d\xi = (1 - \cos LM) d\xi$ area elementi sphaerici MLm, quare erit

$$4d\lambda = MLm$$

& integrando

$$\lambda = \frac{1}{4}MLB.$$

Crescente ergo angulo BLM, crescet quantitas radiorum in triangulum curvilineum FLN incidentium ut area trianguli respondentis circuli que sphaerae maximis terminati BLM, cum quartae parti huius superficiei sit aequalis

§. 664. Pro toto spatio LFG triangulum BLM abit in superficiem hemisphaerii, eritque ergo quantitas radiorum in totum planum superius reflexorum $= \frac{1}{2}\pi$.

§. 665. Sed quantitas radiorum in sphaeram incidentium aequalis est areae circuli maximi, quare cum sit $= \pi$, consequens est; quantitatem radiorum in planum inferius reflexorum quoque esse $= \frac{1}{2}\pi$.

§. 666. Utraque ergo haec quantitas non modo est eadem, verum &, quod notabile videtur, a situ planorum RT, VX non pendet. Utcunque ergo mutetur huius positio, eadem semper radiorum quantitas in istud reflectetur, dimidia nempe pars eorum, qui in totum speculum DKGL incident.

§. 667. Quodsi ergo in vicem utriusque plani substituamus sphaeram infinitam speculo DKGL concentricam, utcunque haec sphaera bifariam secetur plano per centrum Q transeunte, quantitas radiorum a speculo in alterutrum hemisphaerium reflexorum erit constans, dimidia nempe quantitas eorum, qui in speculum incident.

§. 668.

§. 668. Unde porro pronò fluit alueo, quamvis partem superficiei huius sphaerae aequè esse a speculo isto illuminatam.

§. 669. Quodsi sphaera ista speculo circumscripta haud fuerit infinita, positiones hae erunt immutandae. Sit enim speculum DK AL, huic circumscripta concipiatur sphaera concentrica MNS. Radii in speculum incidant secundum directionem parallelam axi sQS. Plano PQO sphaera sit bisecta, atque bisectis pariter arcubus AL, BF in G, F, patet radios secundum directionem gG, fF in puncta G, F incidentes reflecti secundum rectas GM, FN, sectioni PQO parallelas (§ 658.) Cum iam per ea, quae ante demonstraui, quantitas radiorum in spatium speculi GHF incidentium sit $= \frac{1}{2} \pi$, adeoque dimidia pars eorum, qui in totum speculum incidunt, patet quantitatem istam reflecti in segmentum sphaerae MsNHM hemisphaerio PsOP minus, ut adeo quantitas radiorum in hoc hemisphaerium reflexorum maior sit ea, quae in hemisphaerium inferius reflectitur. Nec mirum. Ductis enim rectis rCR, tCT axi sQS parallelis, manifestum est, in segmentum sphaerae RST radios incidere plane nullos, cum totum ab ipso speculo obumbretur. Quare cum omnes reflectantur in segmentum sphaerae RPsOT, facile patescit segmentum MsNHM hemisphaerio minus esse debere, etiamsi in toto ipsius spatio aequaliter disseminarentur. Cum vero maiori copia sursum reflectantur consequens est segmentum MHNOP segmento RST maius esse.

Fig. 63.

§. 670. Ceterum si utrumque hoc segmentum ad totam sphaerae superficiem referatur, facile elucescit, contemnendae utrumque fore paruitatis, quoties diameter OP diametro speculi CD vel centies maior fuerit. Unde adeo his casibus proxime ad verum accedent positiones, quas in praecedentibus pro sphaera infinita eruimus.

§. 671. Ponamus v. gr. lunam esse speculum sphaericum perfecte reflectens, sitque eius semidiameter $\equiv 1 \equiv CQ$. semidiameter orbis lunaris $QS \equiv \sec 16' \equiv 215$. erit eius superficies $\equiv 184900\pi$. Quantitas radiorum solarium in lunae superficiem incidentium est $\equiv \pi$, eadem ergo cum per totam istam superficiem fere aequaliter disseminetur, patet eius densitatem minui in ratione $184900\pi : \pi \equiv 184900 : 1$. Quod si per formulas supra traditas quaeramus claritatem sphaerae in s, quippe quae maxima est, erit $v \equiv 0, \infty$, unde (§. 648.)

Fig. 60.

$$MP \equiv MR \equiv \frac{1}{2} \equiv CP$$

$$RK \equiv PK \equiv 215 - \frac{1}{2} \equiv 214\frac{1}{2}$$

Quare ob (§. 652.)

$$\Delta$$

$$\lambda \equiv \frac{\Delta}{4 IK.RK}$$

erit

$$\lambda \equiv \Delta : 4(214\frac{1}{2})^2$$

At ex calculo rudiori habuimus.

$$\lambda \equiv \Delta : 4(215)^2$$

Quare differentia vix est $\frac{1}{215}$. (§. 670.)

§. 672. In perlustrandis speculis concavis siue ustoriiis breuoribus esse licebit, quippe
cla-

claritatem imaginis in foco haud secus calculo assequi dabitur, ac supra eandem pro lentibus causticis inuenimus. Sit ergo speculum concauum idemque perfecte reflectens ACB, axis GC, obiectum circulare gGγ, huius Fig 64. imago φFf. Quantitas radiorum, quos obiectum gγ in speculum AB diffundit = q , claritas media imaginis hinc nascens = η , diameter sphaerae = $4a$, distantia obiecti GC = δ , erit per principia Catoptrices

$$CF = \frac{a\delta}{\delta - a}$$

§. 673. Ponendo AC = CB, ducantur gA, gB, factaque gK = gA, bifariam secetur KB in P, vi definitionis supra traditae (§. 495.) erunt gA, gB latera coni extremi, & gP semisumma siue medium arithmeticum, atque proinde (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi \cdot AD^2 \cdot Gg^2}{gP^2}$$

Porro ob

$$\eta = q : \pi(Ff)^2$$

erit

$$\eta = \frac{\pi \cdot AD^2 \cdot Gg^2}{Ff^2 \cdot gP^2}$$

Quae ergo est claritas media imaginis, quae quaerebatur:

§. 674. Quodsi AC non fuerit plurium graduum, ponere licebit DC = 0, AD = AC, quo facto erit proxime

$$\eta = \frac{\pi \cdot AC^2 \cdot Gg^2}{Ff^2 \cdot gP^2}$$

Cumque sit

$$Gg:Ff = CG:CF$$

erit

$$\eta = \frac{\pi \cdot AC^2 \cdot GC^2}{CF^2 \cdot gP^2}$$

675. Fiat ut supra (§. 499.)

$$GC:gP = \cos. \omega$$

erit

$$\eta = \pi \cdot \text{tang} AFC^2 : \sec \omega^2$$

Ex his vero formulis eadem deducuntur theorematum, iisdemque fere verbis expressa, quae supra ex similibus aequationibus pro lentibus causticis eruimus (§. 400. seqq.) Quare iis hic repetendis supersedere licebit.

§. 676. Quodsi imago ϕf excipiat charta vel alio obiecto, hoc ipso fiet ut pars radiorum, qui in speculum incidere debuissent, intercipiatur, quare iam minuetur imaginis claritas. Sit semidiameter chartae ϕf , intercipientur radii, quos obiectum per infinitos conos coincidentes in spatium $\pi \cdot \phi F^2$ diffundit: Horum ergo quantitas dicatur q' , atque ducta gf , erit (§. 222.)

$$q' = \frac{\pi \cdot \pi \cdot gG^2 \cdot \phi F^2}{(g\phi + gf)^2}$$

Unde quantitas radiorum in speculum incidentium iam erit

$$q - q' = \frac{\pi \pi \cdot AC^2 \cdot gG^2}{gP^2} - \frac{\pi \pi \cdot gG^2 \cdot \phi F^2}{((g\phi + gf):2)^2}$$

Facile ergo hinc dabitur claritatis decrementum, quod capit imago ab interposita charta vel

vel obiecto $f\phi$. Simili modo decrementum istud definietur, si speculum sumatur, quod in centro C perforatum est, qualia ad conficiendos tubos catadioptricos, similiaque microscopia adhibentur.

§. 677. Haftenus dicta obtinent, ubi specula ponuntur esse perfecte reflectentia. Cum vero huiuscemodi vix dentur, dispiciendum est, qua ratione determinandum sit claritatis decrementum, quod minori vi reflectenti debetur. Experimentis rem istam expedire si specula vel corpora laeuigata plana fuerint, haud erit difficile. Quare methodum, qua uti licet, describam, unoque alteroque exemplo illustrabo, quo facto eam infinitis qui dari possunt casibus specialioribus adplicare poterit, quicunque vim reflectentem, quae cuicunque corpori polito propria est, definire, eamque uno velut obtutu in tabella exhibere gestit. Adparatum, quo ad polienda omnis generis ligna, lapides, metalla cet. tempusque, quod in hisce poliendis singulisque experimentis haud semel instaurandis, terendum esset, mihi deesse, vel indicasse sufficiat.

EXPERIMENTVM XXIV.

§. 678. Collocata in L candela, quae radios normaliter proiiceret in murum albissimum A, in C posui obiectum opacum, quod partem muri B obumbraret. Quo facto in M, N, P, Q collocaui quatuor specula vitrea hydrargyro obducta, quae lumen candelaе in idem muri spatium B reflecterent. Hac servata conditione speculorum distantiam ten-
U 5 tando

Fig. 65.

tando quaesivi eam, qua spatium B a cunctis illuminatum, eadem gauderet claritate, qua altera pars muri A a candela directe collustrata. Dedi vero operam, ut lumen & in specula & in B incideret sub angulo fere recto, atque ipsa candelae flamma quam maxime esset conica (§. 312.) Hoc peracto dimensus sum distantias speculorum a candela & a parte muri B, similiterque ipsam candelae a muro A distantiam, inuenique fuisse in digitis & lineis pedis parisini

$$AL = 81, 11.$$

$$BM = 95, 4.$$

$$LM = 26, 2.$$

$$BN = 97, 10.$$

$$LN = 23, 8.$$

$$BP = 98, 7.$$

$$LP = 21, 8.$$

$$BQ = 97, 11.$$

$$LQ = 18, 5.$$

§. 679. Huic experimento iam ita calculum adcommodaui. Sint imagines candelae m, n, p, q, patet ex superioribus, has totidem candelarum sustinere vices, atque per principia Catoptrices esse $Mm = ML$, $Nn = NL$, $Pp = PL$, $Qq = QL$. Quodsi iam specula M, N, P, Q essent perfecte reflectentia, idem foret effectus, si in vicem imaginum m, n, p, q substituerentur quatuor candelae, ipsi L & magnitudine & claritate aequales, cumque illuminatio cuilibet debita sit reciproce ut quadratum

dratum distantiae (§. 48.) consequens est, hoc casu esse debere

$$\frac{1}{LA^2} = \frac{1}{Bm^2} + \frac{1}{Bn^2} + \frac{1}{Bp^2} + \frac{1}{Bq^2}$$

At distantiae, quas suppeditat experimentum minores sunt, quam ut huic aequationi satisfacerent. Est enim

$$AL = 983.$$

$$Bm = 1458.$$

$$Bn = 1458.$$

$$Bp = 1443.$$

$$Bq = 1396.$$

Quare ob

$$1 = \left(\frac{LA}{Bm}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bn}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bp}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bq}\right)^2$$

erit

$$(LA : Bm)^2 = 0,4546$$

$$(LA : Bn)^2 = 0,4546$$

$$(LA : Bp)^2 = 0,4641$$

$$(LA : Bq)^2 = 0,4958$$

$$\text{Unde summa} = 1,8691$$

$$\text{Quae deberet esse} = 1,0000$$

Minuendum ergo est lumen 1,8691 a speculis reflexum, in ratione 1,8691 ad 1,0000, ut aequale euadat lumini directo in A, quod est = 1,0000. Est vero 1,8691 : 1,0000 = 1 : 0,5352.

Hinc ergo patet dicto lumine in speculum incidente = 1, nequaquam omne istud reflecti, sed quantitatem reflexi tantum fore 0,5352, ut adeo a speculo absorbeatur pars = 0,4648. Quantitas ergo reflexi vix est dimidia pars incidentis.

§. 680. Patet ergo, si duo tantum summa fuissent specula, candelae ista proxime admo-
venda fuissent, quo claritas in B euaderet cla-
ritati directae in A aequalis. At ea a candela
magis esse remouenda, vel inde elucescit, quod
praestat, spatium illuminatum B minus esse,
atque angulos incidentiae luminis in specula
a recto parum discrepare. Hoc vero ipso au-
gendum esse speculorum numerum, vel me-
tacente quilibet intelligit.

§. 681. Eodem modo, quem iam exemplo
illustrauimus vim reflectentem corporum lae-
vigatorum & planorum ad examen reuocare
licet. Monere tamen hic conuenit, dari ca-
sus, quibus cum lumine reflexo miscetur lumen
coloratum (§. 623. 624.) quod cum ab eo se-
parari non possit, seorsim determinandum erit,
siquidem eius rationem habere volueris.

§. 682. Experimentum iamiam descriptum
insuper peculiare quid habet, quod a plurimis
aliis abest. Cum enim specula ista, quibus
usus sum, vitrea sint, hydrargyro obducta,
duplex hic adest reflexio, duplicique ratione
lumen amittitur. Ut igitur definirem, quid
hydrargyro soli debeatur, calculum ita in-
struxi.

Fig 34. §. 683. Sit BO superficies vitri anterior
lumini exposita, CN posterior eaque mercu-
rio obducta, atque ponatur

	in B	C	D
lumen incidens	I	I	I
reflexum	q	π	p
transmissum	n	μ	m

debili-

debilitetur lumen rectam $BC = DC = DE$ &c. percurrentes ut i ad λ , sitque denique quantitas luminis omnis, quod antrosum reflectitur $= M$, quod hydrargyrum ingreditur & ab isto absorbetur $= N$, eodem modo, quo supra (§. 342. 357. 578.) colligitur esse

$$M = q + nm\omega\lambda^2 + nm\omega^2\lambda^4 + nm\omega^3p^2\lambda^6 + \&c.$$

$$N = n\lambda\mu + n\lambda^3\omega p\mu + n\lambda^5\omega^2p^2\mu + \&c.$$

unde

$$M = q + \frac{nm\omega\lambda^2}{1 - \omega p\lambda^2}$$

$$N = \frac{n\lambda\mu}{1 - \omega p\lambda^2}$$

Quare

$$\omega = \frac{M - q}{(Mp + nm - qp)\lambda\lambda}$$

§. 684. Est vero sub angulo recto (§. 443.)

$$q = 0,02$$

$$p = 0,0445$$

$$n = 0,98$$

$$m = 0,9555$$

Et in experimento nostro $M = 0,5352$. Quare erit

$$\omega = \frac{0,5370}{\lambda\lambda}$$

§. 685. Pendet vero λ ab impelluciditate vitri, quam experimentis explorare nolui, cum hydrargyrum a speculis fuisset abradendum. His vero ob alia experimenta parcere consultius esse duxi. Quodsi tamen ponamus esse $\lambda\lambda = 0,9$, erit

$$\omega = 0,5967.$$

§. 686. Quod obtineret si specula essent admodum pellucida. Contra ea si vitrum, quo

quo constant, tabulis istis vitreis quas in experimentis antecedentibus adhibui, aequale fuisse assumamus, quod maxime ad verum accedere autumo, habebimus (§. 472.)

$$q = \frac{1}{2}c, \text{ unde } \lambda = \frac{6}{7}$$

adeoque

$$\varpi = 0,7160.$$

§. 687. Medium vero sumendo, numero rotundiore sumemus

$$\varpi = \frac{2}{3}$$

Ut adeo pars luminis, quae ab hydrargyro absorbetur, proxime sit $\frac{1}{3}$ eius, quod sub angulo recto incidit.

§. 688. Hac ergo ratione ceu vera admiffa, facile dabitur lumen sub quolibet angulo incidentiae reflexum. Est enim in genere (§. 632.)

$$-\log(1-q) = x \sec \gamma^2 = -\log(1-\varpi)$$

At vero pro angulo $\gamma = 0$, est $1-q = \frac{1}{3}$, unde sumendo logarithmos Briggianos, habetur

$$x = -\log \frac{1}{3} = \log 3 = 0,4771212.$$

adeoque

$$-\log(1-q) = 0,4771212. \sec \gamma^2 = -\log(1-\varpi)$$

§. 689. Ita v. gr. sub angulo γ semirecto est $\sec \gamma^2 = 2$, adeoque

$$-\log(1-q) = 0,9542424$$

$$1-q = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2} = \varpi$$

Ut adeo sub angulo incidentiae semirecto nona tantum pars luminis incidentis absorbeatur.

§. 690.

§. 690. Sub angulo $\gamma = 60^\circ$, est $\sec \gamma^2 = 4$, adeoque reperietur

$$-\log(1 - q) = 1.9084848$$

$$1 - q = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2} = \omega$$

quare sub angulo incidentiae 30 gr. tantum $\frac{1}{2}$ luminis incidentis absorbetur.

§. 691. Probe tamen notandum est, haec ad verum tunc tantum accedere, cum lumen e vitro in superficiem hydrargyri incidit. Quod si vero incidat ex aere, mea quidem sententia quantitas luminis reflexi augetur §. 327. seqq.)

§. 692. Detur iam speculum causticum vitreum mercurio obductum, facile patet dimidiam tantum partem radiorum qui in istud incidunt, ab eo reflecti, (§. 679), ut adeo claritas imaginis duplo minor sit ea, quae obtineret, si speculum esset perfecte reflectens. (§. 635.)

§. 693. Quod si iam quaeratur quantitas luminis a speculo vitreo sub quolibet angulo inclinationis γ reflexo, fieri id poterit ope utriusque formulae ante erutae

$$M = q + \frac{nm\omega\lambda^2}{1 - \omega p\lambda^2}$$

$$-\log(1 - \omega) = 0.4771212. \sec \gamma^2$$

simulac detur valor ipsius λ ab impelluciditate vitri pendens. Etenim quantitates q, n, p, m dantur per utramque tabellam (§. 442. 443) siue per formulas (§. 438.) & quantitas ω per angulum γ ope aequationis posterioris.

§. 694. Posita v. gr. $\lambda\lambda = \frac{1}{2}$, quaeramus lumen sub angulo incidentiae 30° a speculo

Fig. 66. reflexum. Sit ergo BF eius superficies anterior, CG posterior mercurio obducta. Lumen secundum AB incidat in B, erit ang. $ABM = 30^\circ$, unde $ABK = 60^\circ$, adeoque ob

$$\sin ABK : \sin CBP = 3 : 2$$

erit

$$CBP = \frac{2}{3} \sin ABK = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Quare

$$\sec \gamma^2 = \sec CBP^2 = 1,5$$

hinc

$$-\log(1 - \varpi) = 0,4771212 \sec \gamma^2 = 0,7156818$$

adeoque

$$1 - \varpi = 0,1925.$$

$$\varpi = 0,8075.$$

Erit ergo ϖ proxime $= \frac{4}{5}$.

§. 695. Porro ob $KBA = 60^\circ$, habebitur (§. 443.)

$$q = 0,0772$$

$$n = 0,9228$$

$$p = 0,1653$$

$$m = 0,8347.$$

Unde erit

$$nm\varpi\lambda^2 = 0,5135$$

$$1 - p\lambda^2\varpi = 0,8943$$

adeoque

$$M = q + \frac{nm\varpi\lambda^2}{1 - \varpi p\lambda^2} = 0,6514.$$

Quare lumen a speculo vitreo mediocriter pellucido sub angulo incidentiae 60 gr. reflexo fere est $\frac{2}{5}$ incidentis.

CAPVT II.

Experimentis inter se conferuntur claritas
luminis siue obiecti illuminantis, & clari-
tas corporis opaci, quod ab eo collustra-
tur, cuiusque superficies asperior est
minusque polita.

§. 696. **Q**uadruplici modo lumen in su-
perficie corporum opacorum
incidens, ab iis diuidi atque calculo prose-
quendum esse, iam initio capituli praecedentis
vidimus (§. 622. 623.) eiusque partem
eam, quam κατ' ἐξοχην *reflexam* vocauimus, ita
dedimus euolutam, ut nec materies desit iis,
quibus eam pro singulis, quae dari possunt,
corporibus experimentis definiendi animus
erit & otium. Ad reliquas tres partes, quas
fere intactas reliquimus, iam regrediamur,
atque dispiciamus, qua ratione lumen a cor-
poribus opacis dispersum, coloratum & amif-
sum determinandum sit.

§. 697. Cum superficies omnium corpo-
rum ita laeuigari possint, ut sublata asperi-
tate, nitidiora euadant lumenque saltem ex
parte reflectant, consequens est, lumen re-
flexum nunquam prorsus ab iis abesse, verum-
modo cum lumine colorato & disperso ita
misceri, ut una cum eo quaquauersum a cor-
pore repercutiatur. (§. 626.) Euidens quoque
est, hoc obtinere, simul ac corporis super-
ficies ita exasperetur, ut omnis nitor plane
tollatur, minimaequae particulae, quae in su-
perficie sunt, lumen sub omnibus angulis in-
ciden-

cidentiae quaquaversum reflectant. Hanc vero esse indolem corporum omni nitore destitutorum, experientia facile constat. Quodsi enim eiusmodi superficies subiiciatur microscopio instar montium & vallium eam scabrosam & inaequabilem esse vel primo intuitu videre licet.

§. 698. Ut porro maxime irregularis est ista scabrities, ita vix dabitur anomalias istas ad legem quandam reuocare, qua stabilita instrui possit luminis quaquaversum reflexi calculus. Etsi enim cum cel. KAESTNERO iure meritoque spectari possint instar minutissimorum speculorum, quoslibet situs aequae adfectantium, concedenda tamen sunt interstitiola quae lumen in interiores corporis partes transiturum libere permeare possit. Similique modo speculorum istorum alia ab aliis obumbrari, ob omnimodam eorum positionem necessario statuendum est. Porro cum omnes, qui dari possunt, eorum situs simul obtineant lumen sub angulis quibuscunque in ista simul incidit. Hinc vero vel maxima nascitur luminis reflexi diuersitas, quae non potest non calculum reddere intricatissimum.

§. 699. Quae cum ita se habeant, satius esse duxi, rem istam omnem experimentis euolutam sistere, etsi hac ratione lumen quacunque demum ex causa dispersum totum quantum est computum ingrediatur, neque constet liquido, quota eius pars cuique istarum causarum debeatur. Unum hoc praemonendum est, me in istis experimentis spectare

Etare corpora ceu minime laeuigata atque & in minutissimis particulis velut absolute scabrosa & impolita, quo ipso statuere certe licet, lumen omne incidens perfecte dispergi, neque a particulis, quae remanere possent, nitidioribus ita reflecti, ut lumini colorato ab interioribus corporis particulis repercussio ne minimum officiat.

EXPERIMENTVM XXV.

§. 700. Duabus chartis AB, AC mensae impositis, quae in A angulum claudebant Fig. 67 quemcunque, duobus tamen rectis notabiliter minorem, in L collocaui candelam, quae ab utraque charta aequè distaret, atque triangula ABL, ACL redderet aequalia, adeoque & puncta in utraque charta ab A aequidistantia aequè illuminaret. Quo facto a candela utcunque recessi obliquius, atque in DE ipsi obuerti lentem conuexam, chartaeque utriusque imaginem excepi in foco $f\phi$. Vidi uero, imagine puncti A cadente in F puncta ab F utrinque aequè distita aequè quoque esse illuminata. Idemqueprehendi, situm lentis ita immutando, ut angulus LAF tum maior tum & minor euaderet.

§. 701. Aucto angulo LAF augebantur anguli emanationis FAB, minuebantur anguli FAC, sub quibus lumen e charta AC emanabat in superficiem lentis DE. At cum nilominus utriusque chartae imago $F\phi$, Ff aequè clara esset, patet hanc claritatem ab angulo emanationis non pendere, nisi, quod ex superioribus constat, data opera ratio inter

distantias bG, AG, cG admodum fiat notabilis. At cum hoc ipso confusae euadant imaginis partes, hinc vel sua sponte elucescit, huiusmodi casus vitandos esse.

Fig. 68. §. 702. Sit ergo lens AB, huius axis FCG, in Gg & Gy concipiantur duo plana vel infinite parua vel infinite remota, quo anguli gCG, GCy euadant minimi. Horum prius Gg axi normaliter instat, posterius Gy ad eum sub angulo quocunque sit inclinatum, utrumque vero aequae clarum. E puncto γ agatur normalis ad axin γP , sitque $Gg = Gy$. Excepta iam utriusque plani imagine in ϕFf , ductisque rectis gCf, $\gamma C\phi$ patet fore

$$\phi F : P\gamma = Ff : Gg.$$

At vero cum utraque imago sit aequae clara, eademque pro utraque sit lentis apertura & distantia, consequens est, quantitatem radiorum in lentem incidentium esse ut ϕF ad Ff adeoque ut $P\gamma$ ad Gg . Quod si ergo in vicem lentis substituatur charta aequalis, evidens est, huius chartae illuminationem utrique plano Gg, Gy debitam esse in ratione gG ad γP . Spectetur $Gg = Gy$ ceu sinus totus, erit γP sinus anguli emanationis. *Quare illuminatio directa decrescet ut sinus anguli, sub quo lumen emanat.* En ergo positionem, quam supra curatius demonstratam dare promissimus (§. 74. seqq.)

§. 703. Eandem deprehendes utriusque imaginis Ff, $F\phi$ claritatem, si plana sumantur pigmento quocunque sed eodem & aequae illita, omnique nitore, quantum eius fieri potest, destituta. Ex cunctis enim lumen ita
ema-

emanat, ut eius quantitas minuatur in ratione sinus anguli emanationis. Quodsi ergo eiusmodi corpora a lumine quocunque collustrentur, eiusque porro vicem sustineant, facile & hinc iterum patet, omnia de eo valere quae de lumine, quod corporibus luminosis proprium est, in antecedentibus demonstravimus. Palmariam vero hanc positionem iam inter principia quae cuique facile sese probant, a nobis relatam esse videbis (§.40.)

§. 704. Inter corpora mutuato lumine visibilia, eminent *alba*. Haec vero ea esse, quae lumen, quod in eorum superficiem incidit, tantum non omne reflectunt, vel maxime euictum est. Similiter experimentis, quae hic describere, cum ubique ea descripta inuenias, superfluum foret, lumen album prismatis ope ita diuidi, ut radii colorati, qui iunctim albedinem constituunt, charta excepti, singuli seorsim spectabiles sint, iterumque vero collecti, albedinem illam denuo spectandam exhibeant.

§. 705. Iisdem porro experimentis constat, albedinem hanc minus fore absolutam, simulac radiorum coloratorum ex quibus conflata est, quidam abfuerint, ut adeo hinc pateat, ad constituendam albedinem omnibus veluti numeris absolutam, definitam singulorum istorum radiorum requiri quantitatem, definitamque esse inter eos rationem, qua seruata albedo obtinebit, quae gradu tantum a qualibet alia differre poterit.

§. 706. Etsi vero ratio ista vix definiri queat, assumenda tamen erit instar principii,

cui superstruenda est corporum, quae alba dicuntur, definitio, eorumque variae, quae dari possunt species.

§. 707. Ut ergo illud tantum lumen vere album dicitur, quod radios coloratos in ea ratione emittit, quae ad constituendam albedinem requiritur, sic quoque corpora opaca alba dicentur ea quae lumen coloratum in eadem hac ratione reflectunt. Cumque posteriori hoc casu albedo tantum a lumine reflexo pendeat, patet, perinde fere esse, siue lumen in ea ratione incidat, quae ad albedinem requiritur, siue alia adfuerit inter colores luminis incidentis ratio.

§. 708. An vero detur corpus perfecta albedine gaudens, maxime dubitandum. Nimirum quantum enim omnia in hoc qui actu est rerum statu inuicem permixta sunt, quam ut ad unam eandemque simplicissimam legem sese componant. Cum vero possibilitas istius modi corpori denegari vix possit, nil impedit, quo minus albedinem hoc sensu absolutam admittamus, a qua ceteri albedinis gradus ceteraeque species computandae sunt.

§. 709. Porro utique distinguenda venit *albedo luminis*, ab ea quae *corpori opaco* tribuitur, cum haec ab illa pendeat. Summus vero albedinis gradus, si eam ad lumen ipsum referas, huiusque spectes intensitatem, indefinitus est, cum in infinitum eum augeri posse ponendum sit. Unitas ergo, ad quam gradus isti sunt referendi, admodum est arbitraria, ut in singulis casibus, quibus a 0 ad infinitum usque excurrit quantitatum mensura, esse solet.

§. 710.

§. 710. Contra ea dabitur albedinis gradus summus isque definitus, si corpus spectes opacum, a lumine albo ita collustrandum, ut itidem album videatur. Illud enim nobis hic *absoluta albedine* gaudere dicetur, quod lumen vere album in eius superficiem incidens totum quantum incidit, iterum reflectit, atque quaquaversum dispergit.

§. 711. Cum ergo hac ratione albedo corporis opaci simpliciter ad eius vim reflectentem reducatur, facile patet, eatenus perinde esse, quatenam sit luminis incidentis intensitas. Hac enim utcumque aucta vel imminuta, augebitur quoque vel minuetur intensitas luminis reflexi, quod vero debita manente inter colores luminis incidentis ratione, eandem albedinem, gradu tantum diuersam, spectandam sistet.

§. 712. Huiusmodi corpus inrerum natura vix dari iam monuimus (§. 708.) Eorum certe, quae nouimus, nullum est, quod nullum lumen absorbeat, quodque cunctos radios aequae reflectat. Ut vero radiorum amissorum quantitas experimentis & calculo definiri possit, utique necessarium erit, in ea corpora curatius inquirere, quae lumen omne reflectere absolutaque albedine gaudere assumimus. Videamus ergo, quid obtineat in casu illuminationis absolutae, cum ad hunc ceteros omnes in superioribus reduci posse ostendimus.

§. 713. Sit ergo AB planum luminosum Fig. 69. infinite extensum, huic opponatur planum DE absolute album, patet quodlibet huius plani punctum F absolute illuminari (§. 100.)

Claritas plani AB vocetur $= L$, spatiolum F dicatur $= 1$. Porro sumto radio quolibet CQ descriptus concipiatur circulus, cuius diameter sit QR, centrum C ipsi F normaliter immineat, patet ex superioribus quantitatem radiorum per conum QFR in F incidentium esse $\pi \cdot \sin QFC^2 \cdot L$. (§. 121.) adeoque quantitas e toto plano AB in spatiolum F incidens $= \pi L$.

§. 714 Porro sit claritas spatioli F absolute illuminati $= \lambda$, atque per supra demonstrata erit quantitas radiorum per conum QFR in circulum QR incidens $= \lambda \pi \sin QFC^2$ (§. 125.) similiterque ea, quae in totum planum AB reflectitur erit $= \lambda \pi$. At vero cum planum DE ponatur perfecte album, quantitas haec erit eadem, quae in spatiolum F incidebat, quamquae vidimus esse $= \pi \lambda$. Unde fiet

$$\lambda \pi = L \pi$$

$$\lambda = L$$

similiterque ob

$$\lambda \pi \sin QFC^2 = L \pi \sin QFC^2$$

hinc utrumque sequens deducetur

THEOREMA XXXI.

§. 715. Si corpus absolute album absolute illuminetur, eadem erit eius claritas, quae est claritas luminis siue obiecti illuminantis.

THEOREMA XXXII.

§. 716. Si corpus absolute album ab alio quocunque luminoso absolute illuminetur, quantitas radiorum in datum corporis luminosi spatium reflexorum eadem est, quae ex isto spatio in corpus album inciderat.

DE-

DEMONSTRATIO.

Est enim quantitas e circulo QR in F incidens $= \pi L \sin QFC^2$, reflexa $= \pi \lambda \sin QFC^2$. Sed vidimus esse $L = \lambda$. Constat ergo propositum pro eo casu quo pars illuminans QR est circularis. Uniuersaliter patebit, si differentian- do quaeratur radiorum quantitas cuique cir- culi QR spatiolo in utroque casu debita. Fa- cile enim patet, pro utroque eandem differen- tiari formulam. At ex differentialibus quae- cunque compones spatia.

§. 717. Claritatem plani AB diximus = L
eamque a diuersitate radiorum, qui eam ef-
ficiunt independentem esse hoc ipso posui-
mus. Cum enim planum, D ob absolutam
qua gaudet albedinem omnes radios nullo
intercedente discrimine reflectat, patet hoc
obtenturum, siue lumen incidens perfecte
fuerit album, siue utcunque coloratum. Quod si
ergo planum AB fuerit rubrum, flauum vi-
ride &c. facile patet planum DE, cum sit al-
bissimum hos tantum radios, qui incidunt
fore reflexurum, atque in casu illuminationis
absolutae aequè visum iri rubrum, flauum
viride ac est planum AB, a quo illuminatur.
Quod quidem ope camerae obscurae adeo
fit manifestum, ut etsi charta, qua excipitur
obiectorum imago, neque absolute sit alba
neque absolute illuminata, nilominus obiecta
eo colore depicta exhibeat, quo re ipsa & oculo
conspicua sunt.

§. 718. Ut ergo indifferens est plani AB
claritas & color, simulac planum DE ponatur
X 5 esse

esse perfecte album absoluteque illuminatum, ita contra ea secus res se habet, si planum DE minus album fuerit. Duplex vero hinc enascetur claritatis decrementum. His enim casibus pars quaedam luminis a plano DE absorbetur, ut etsi ceteroquin album sit, hoc ipso videatur esse obscurius, siue minori claritate gaudens. Quodsi porro insuper coloratum esse statuatur, alterum accedet claritatis decrementum, quippe nonnisi eos radios, qui colorem istum constituunt, atque ne quidem hosce, quotquot incidunt, reflectet, immo & ipsis reflexis immiscebit radios diuersi plane coloris. Hanc vero esse indolem corporum naturalium experimentis prismate institutis iam dudum constat.

§. 719. Diuersam esse radiorum coloratorum naturam, diuersamque eorum celeritatem, refractionem & reflexionem plurima experimenta notissima palam faciunt. Quanam vero ratione computanda sint singulorum vires illuminantes, quaenam esse debeat inter eos proportio, ut lumen album coelegant, nondum liquet. Interim tamen utique concedenda erit eorum densitas & quantitas, eodem modo definienda, quo supra (§. 42. seqq.) utramque lumini competere vidimus. Hac vero distinctione ita iam utemur.

§. 720. Unitatem, per quam radiorum quantitas, quomodocunque demum haec sit concipienda, exprimenda est, admodum arbitrariam esse supra iam vidimus (§. 43.) Eodemque ergo modo & eae unitates, quibus quantitates radiorum coloratorum definiri debent,

bent, arbitrarías esse vel me tacente patet. Quare eas, prout conditiones problematis id requirent, variis modis assumemus, ita tamen ut semper ad legem homogeneorum reuocentur.

§. 721. Sic v. gr. si ponamus quantitatem luminis absolute albi $= 1$, nil impedit, quominus & quantitatem radiorum rubrorum, viridium cet. seorsim spectatorum per totidem unitates exprimamus, quoties id requirit calculi concinnitas.

§. 722. Porro radii diuersi coloris assumendi sunt heterogenei, cum eos homogeneos esse vix demonstrari possit. At vero hoc ipso longe difficilior euadit comparatio, quae inter claritatem diuersorum colorum esset instituenda. Unicus vero datur casus, quo ista comparatio succedit. *Quodsi enim in colore quodam mixto eadem seruetur inter radios diuersi coloris ratio, coloris istius diuersi gradus haud difficulter inter se comparantur.* Gradu enim non specie color iste mutatur. Inquirendum ergo est, ubinam hic casus obtineat.

§. 723. Sit corpus quoddam mixto colore conspicuum rubro v. gr. & flauo. Ponamus istud a lumine collustrari, cuius claritas sit $= 1$. Quodsi lumen hoc perfecte sit album, omnis generis radii in corporis istius superficiem incident, rubri vero & flauí aut soli aut fortius reflectentur, quam ceteri. Quodsi ergo ponamus reflecti dimidiam partem eorum qui incidunt, concessum iri confido, *eandem hanc partem dimidiam reflecti, etsi radii rubri & flauí soli inciderent, eamque duplicari, si quantitas incidentium*
dupli-

duplicet r. Non modo enim radii incidentes sibi inuicem non obstant (§. 50. seqq.) verum & ii, qui rubri sunt, proprium, quo gaudent, colorem haud mutant. Quod experimentis satis superque euictum est.

§. 724. Manente ergo corporis superficie, quantitas radiorum cuiuscunque coloris reflexa constantem seruat rationem ad quantitatem eorum qui incidunt.

§. 725. Corpus absolute album cum absolute illuminatur, eadem claritate gaudere vidimus, qua gaudet lumen, a quo illuminatur (§. 715.) hanc ergo ceu unitatem spectare licet, ad quam ceteri albedinis gradus referuntur, ut adeo ea corporis opaci albedo nobis hic sit $= 1$, quae radios incidentes reflectit omnes, patetque aliam albedinem quamcunque eo fore minorem, quo pauciores radios reflectit. Quodsi itaque radii incidentes ponantur $= 1$, reflexi $= q$, erit corporis albedo $= q$. Eodemque hoc modo computandos esse gradus rubedinis, viredinis ceterorumque colorum quatenus vim reflectentem spectant, facile intelligitur.

Fig. 70. §. 726. Sit iam in L lumen, quod concinnitatis ergo globosum statuemus, huiusque semidiameter ponatur $= 1$, claritas $= \lambda$, ponamus eius radios normaliter incidere in planum absolute album G, huius claritas in casu illuminationis absolutae itidem erit $= \lambda$ (§. 715.) At cum ob maiorem luminis distantiam minuatur radiorum incidentium quantitas, iam eius claritas tantummodo erit $= \lambda : GL^2$ (§. 115.)

§. 727.

§. 727. Quod si vero ponamus albedinem plani Ggy non esse absolutam, verummodo $\propto A$, ut sit $1:A$ in ratione radiorum incidentium ad radios reflexos, in eadem hac ratione minuetur claritas $\propto \lambda:GL^2$, ut sit $\propto A\lambda:GL^2$. Unde liquet

THEOREMA XXXIII.

§. 728. Si planum album a lumine sphaerico normaliter illuminetur, erit eius claritas directe ut factum ex claritate luminis illuminantis in albedinem plani illuminati, reciproce vero ut quadratum distantiae centri luminis sphaerici.

§. 729. Ponamus iam in D esse aliud planum, ab eodem lumine normaliter illuminandum, dicta plani istius albedine $\propto a$, patet eius claritatem fore $\propto a\lambda:LD^2$.

§. 730. Quodsi ergo claritas plani G fiat $\propto C$, plani D $\propto c$, erit

$$C \propto A\lambda:LG^2$$

$$c \propto a\lambda:LD^2$$

§. 731. Planum G claritate C gaudere ponatur quasi ipsi propria esset, atque ponamus ab eo absolute illuminari planum aliud, cuius albedo $\propto a$, siue albedini ipsius plani D aequalis, iterum patet huius plani claritatem eundem $\propto Ca \propto aA\lambda:LG^2$. Hac iam claritate ita utemur.

§. 732. Recta GF ad DF normalis sit axis lentis AB, qua radii e plano G emanantes ita colligantur ut conuergant in planum F, ibique plani CGy depingant imaginem ff. Quodsi iam ponamus lentem AB omnes radios transmittere, patet claritatem imaginis centalem in F pendere

dere a claritate C , qua gaudet planum G , atque ab illuminatione supra (§. 500.) definita, quam vidimus esse

$$\eta = \pi \frac{\text{tang AFC}^2}{\text{sec AGC}^2}$$

§. 733. Est vero π illuminatio absoluta, quam inuenimus esse $= aC = aAL : LG^2$, hoc ergo valore substituto erit claritas imaginis centralis

$$\eta = \frac{a.A.\lambda.\text{tang AFC}^2}{LG^2.\text{sec AGC}^2}$$

§. 734. At enimvero cum lens haud ita sit diaphana, ut nulli radii reflectantur & dispergantur, ponamus radios incidentes esse ad eos, qui imaginem depingunt ut 1 ad κ , atque patet fore

$$\eta = \frac{\kappa.a.A.\lambda.\text{tang AFC}^2}{LG^2.\text{sec AGC}^2}$$

Quodsi breuitatis ergo κ vocetur lentis impelluciditas, haec aequatio sequens suppeditabit

THEOREMA XXXIV.

§. 735. Si planum album G a lumine globoso L collustretur, eiusque imago a lente AB proueniens in F excipiatur plano alho DF , habebitur imaginis F claritas centralis, si factum ex impellucidate lentis, claritate luminis L , albedine utriusque plani G, F , & quadrato tangentis anguli AFC , per factum ex quadrato distantiae luminis LG , & quadrato cosinus anguli ACG diuidatur.

§. 736. Theorema hoc obtinet, si semidiameter globi L ponatur $= 1$, uti fecimus (§. 726.) Ceterum vel me tacente patet angulos AFC ,
AGC

AGC esse lentis AB semidiametros adparentes, si in F & G spectetur. Unde & his notionibus in efferendo hoc theoremate uti licebit, quo meris verbis exprimatur.

§. 737. Quodsi distantia GC distantia focali lentis AB vel decies maior fuerit, angulus AGC valde parvus euadit, & mutata vel multiplicata distantia GC angulus AFC parum mutabitur, adeoque his casibus claritas imaginis fere constans est. Contra ea claritas plani D directe a lumine L collustrati, quam vidimus esse (§. 730.)

$c = a\lambda : LD^2$
admodum est variabilis, cum absoluta euadat, plano D lumini L ita admoto, ut eius superficiem contingat (§. 100.) contra ea euanescat, plano D a lumine L ad infinitam distantiam remouendo. Dabitur ergo distantia quaedam, ad quam claritas imaginis F claritati in D, quae lumini directo debetur, euadit aequalis.

§. 738. Ponamus iam hanc distantiam esse GF vel LF, arque erit $n = c$, adeoque (§. 730. 734.)

$$z.a.A\lambda.tangAFC^2 = a\lambda$$

$$LG^2.secAGC^2 = LD^2$$

Qua aequatione debite reducta erit

$$z.A.tangAFC^2 = 1$$

$$LG^2.secAGC^2 = LD^2$$

unde fiet

$$A = \frac{LG^2.secAGC^2}{LD^2.z.tangAFC^2}$$

Quam aequationem sequens explicat

THEO.

THEOREMA XXXV.

§. 739. Si planum G a lumine L normaliter illuminetur atque ope lentis AB eius imago F plano DE ad eam distantiam excipiat, ad quam claritas imaginis centralis F claritati plani in D ab eodem lumine L directe collustrati euadat aequalis, habebitur albedo plani G , si factum ex quadrato distantiae luminis LG & quadrato secantis anguli AGC per factum ex impelluciditate lentis, quadrato distantiae luminis LD & quadrato tangentis anguli AFC dividatur.

§. 740. Theorema hoc, cum in Photometria maximi sit momenti, curatius nobis hic est euoluendum, Atque primo quidem recordandum est (§. 727.) albedinem A , quae per theorema hoc definitur, esse quantitatem radiorum reflexorum, si quantitas incidentium dicatur $= 1$; ut adeo euadat $A = 1$, simulac planum G , cuius albedinem refert, fuerit absolute album (§. cit.)

§. 741. Porro quantitatem & breuitatis ergo vitri impelluciditatem vocauimus (§. 734) at vera eius significatio supra iam definita (§. 734.) haec est, ut dicta quantitate radiorum in lentem incidentium $= 1$, sit & quantitas ea, quae in F coincidit, atque imaginis claritatem constituit. Quomodo vero per experimenta curatius sit determinanda, iam in superioribus ostensum est (§. 517. seqq.)

§. 742. Porro notabimus, formulam eruiam (§. 738.)

$$A = \frac{LG^2 \cdot \sec \angle AGC^2}{LD^2 \cdot \text{tang} \angle AFC^2}$$

quan-

quantitates a, λ non ingredi, ut adeo albedo A hac ratione definiatur, quaecunque sit claritas luminis L & albedo plani DF , quo excipitur imago & lumen directe in D incidens. Praestat tamen lumen clarius, cum error minor metuendus sit (§. 270.) Praestat porro, chartam vel planum DF plano Gg esse prorsus simile tum ratione albedinis tum & vel maxime ratione coloris (§. 308. sq.)

§. 743. Eandem ob causam convenit distantiam LG assumere mediocrem. Quod si enim nimia esset, facile patet chartae G claritatem valde parvam fore evasuram, quod cauendum esse iamiam monuimus. Neque tamen nimis parva esse debet distantia LG . Cum enim tantum spectanda sit claritas centralis, atque supra (§. 265. seqq.) ostensum sit, dari quoddam spatium $g\gamma$, ad sensum aequae illuminatum, angulumque maximum GLG decem gradus excedere haud debere, facile patet spatii $gG\gamma$ imaginem ϕFf ea fere claritate gaudere, quae claritati vere centrali sit aequalis. Cauendum ergo erit, ne spatium ϕ fita fiat exiguum ut visu sit difficilius. Quod cum fieret si distantia GL esset nimis parva, haec utique erit augenda. Ceterum facilius in dato quovis casu experimentis definitur.

§. 744. Aucta distantiarum LG , LD alterutra & altera augetur, cum eadem albedo A sit directe ut LG^2 reciproce ut LD^2 . etsi ergo aucta distantia GL augeatur spatium Gg , attamen ob auctam simul distantiam LD minuetur spatium imaginis Ff . Quare & hanc ob causam, distantia GL determinanda erit ea, quae spatium claritatis centrali fere aequalis

lis facile spectabile sistat, simulque ipsam claritatem notabiliorem reddat.

§. 745. Porro angulus AGC plerumque gradum unum non excedit unde absque notabili errore fiet

$$AG = GC, \text{ \& sec } AGC = 1.$$

Quo assumpto habebitur

$$A = \frac{LG^2 \cdot CF^2}{LD^2 \cdot AC^2 \times}$$

Quo ergo modo dabitur albedo *A* per meras distantias.

§. 746. Lumen *L* assumimus esse sphaericum, quo concinnior euaderet formula eruenda. Hoc enim modo factum est, ut illuminatio utriusque plani *G*, *D* directa simpliciter esset reciproce ut quadrata distantiarum *GL*, *DL*. At vero haud difficulter universalius res absoluetur. Dicta enim illuminatione *G* directa = *I*, in *D* = *i*, erit

$$A = \frac{i \cdot CF^2}{I \cdot AC^2 \times}$$

Quaecunque ergo sit figura luminis *L*, facile ea definita dabitur ratio *i:I* per ea theoremata, quibus in superioribus (P. I. C. II.) illuminationem directam pro quibuscumque casibus definiuimus. At vero curatori hoc calculo haud opus erit, simul ac distantia *GL* diametro vel latitudine luminis pluries maior fuerit, Ponamus v. gr. *L* esse flammam candelae, huius figura vera proxime erit conica, adparens vero a triangulari haud ita multum abludet. Quodsi ergo distantia *GL* altitudinem coni quater vel pluries excedat, per theore-

rema XII (§. 145.) facile patebit absque notabili errore fieri posse

$$I:i = LD^2:LG^2$$

ut adeo ponere liceat

$$A = \frac{LG^2 \cdot CF^2}{LD^2 \cdot AC^2 \cdot x}$$

Ceterum in sumendis experimentis opus est cautelis supra descriptis (§. 312. 311. 309.) eum piures ob causas maxime difficilis sit comparatio inter claritatem directam in D & eam, qua gaudet imago F. Hisce quoque cautelis accedunt specialiores illae, quas pro casu praesenti iamiam descriptas dedimus (§. 742. seqq.)

EXPERIMENTVM XXVI.

§. 747. Erecto in gGy scapo chartae albis-
simae, in L collocaui candelam ita emunctam,
ut flamma eius utrinque aequè videretur cla-
ra & aequè conica, atque radii normaliter in-
ciderent in G. Sumta porro lente, cuius im-
pelluciditatem instituto experimento XIX.
(§. 517.) inueneram esse $x = \frac{5}{3}$ (§. 741.) eam
in ABita plano G obiecti, ut imago in F charta
aequè alba excepta eadem gaudere videre-
tur claritate, qua charta in D directe a lu-
mine candelae collustrata. Tentando quae-
rendam fuisse distantiam GC vel LC me non
monente patescit. Ea vero reperta dimensus
sum distantias LD, LG, a centro flammae
candelae computandae, in digitis parisinis.
Cumque scirem distantiam lentis focalem pro
radiis parallelis esse $= 6\frac{1}{3}$, calculo definiui
distantiam imaginis CF distantiae GC respon-
den-

dentem. Denique semidiametrum aperturæ AC inueni esse = 0,93. dig. His ergo valoribus in formula (§. 745. 746.)

$$A = \frac{LG^2 \cdot CF^2}{LD^2 \cdot AC^2 \cdot x}$$

substitutis experimento undecies iterato sequens inde enata est tabella

Exp.	Ex obseruatione		Ex calculo	
	GL	LD	CF	A
1	5	65	7,04	0,4080
2	6	78	6,89	0,3898
3	6 $\frac{1}{4}$	79	6,88	0,4110
4	7	86	6,84	0,4300
5	7	90	6,81	0,3891
6	7	88	6,81	0,4071
7	8	96	6,80	0,4454
8	8	110	6,72	0,4172
9	10	122	6,68	0,4159
10	10	125	6,67	0,3950
11	12	147	6,60	0,4041

§. 748. Quodsi iam valores ipsius *A* in summam contrahantur, erit hæc = 4,5126, qua per numerum obseruationum 11 diuisa, prodit valor ex cunctis medius = 0,4102. Omisso vero experimento septimo utpote maxime aberrante, est summa ceterorum = 4,0672, & ex his valor medius = 0,4067. qui a priore 0,4102 differt parte 0,0035 siue $\frac{1}{312}$ ipsius valoris 0,4067, ut adeo vix magis a vero aberret (§. 294.)

§. 749. Cum itaque albedo scapi chartarum albißimi sit proxime $= 0,4102$ siue numero rotundo $= \frac{2}{5}$, patet eam ab absoluta albedine multam abesse atque ista plus duplo esse minorem.

§. 750. Porro hinc patet, splendorem huius chartae, cum absolute illuminatur tantummodo esse $\frac{2}{5}$ splendoris luminis a quo illuminatur.

§. 751. Similiter evidens est, scapum istum $\frac{3}{5}$ radiorum incidentium absorbere, atque nonnisi $\frac{2}{5}$ ab eo reflecti.

§. 752. Adhibita charta unica, eaque plano nigro adfixa, inueni eius albedinem fere $\frac{2}{13}$, eadem vero inter candellam & lentem collocata, inueni radios, quos trans mittebat esse $\frac{1}{5}$ incidentium. Charta regia, ob albedinem & crassitiem fere nullos radios transmittens, duas quintas partes reflexit, haud fecus ac chartarum scapus.

§. 753. Contra ea charta bubula, calore cinereo subfusco vix $\frac{1}{12}$ radiorum reflexit. Charta colore subcaeruleo clariore octauam radiorum incidentium partem reflectere valuit. At vero cum omnes chartas ideo minus reflectentes esse suspicarer, quod nimis sint porosae, experimentum ita instauravi.

EXPERIMENTVM XXVII.

§. 754. Ex cerussa albißima, quam vulgo *Cremsferweiß* vocant, paravi pigmentum, hocque chartae regiae albißimae ita illeui, ut nullum amplius lumen transmitteret. Quo facto chartam hoc modo pigmentatam collocaui in G, eademque ratione quaesiui lentis

Y 3.

AB

AB distantiam eam, qua imago F aeque videretur clara ac charta in D directe collustrata. Experimento septies repetito calculoque subducto inueni

Exp.	Ex observatione		Ex calculo	
	GL	LD	CF	A
1	$4\frac{3}{4}$	60	7,14	0,4567
2	$4\frac{5}{8}$	$61\frac{1}{2}$	7,08	0,4295
3	$4\frac{5}{8}$	65	7,05	0,3812
4	6	$76\frac{1}{2}$	6,91	0,4074
5	6	69	6,99	0,5125
6	7	90	6,81	0,3892
7	$8\frac{1}{2}$	95	6,80	0,4740

§. 755. Quodsi ergo iterum ex his valoribus ipsius albedinis *A* sumatur media, erit haec = 0,4358, siue neglecto experimento quinto, quippe quantitas 0,5125 ceteras omnium maxime excedit, erit media ex ceteris = 0,4230, quae a media ex omnibus deducta 0,4358 differt parte 0,0128 siue $\frac{1}{34}$. Ut adeo albedo cerussae, quae chartae erat illita, proxime sit = 0,4230. At experimento praecedenti inuenimus albedinem scapi chartarum = 0,4067. Patet ergo utramque perparum discrepare, cum differentia tantum sit = 0,0163. siue $\frac{1}{28}$ albedinis ipsius cerussae.

EXPERIMENTVM XXVIII.

§. 756. Sumtis duabus chartis minlo pigmentatis, alteram posui in G alteram in F,

F, atque haud secus ac in utroque experimen-
to praecedenti debitam quaesui distantiam
GC siue GF. Experimento octies instaura-
to, calculoque eodem modo, quo supra sub-
ducto, inueni fuisse.

Exp.	Ex obseruatione		Ex calculo	
	GL	LD	CF	A
1 ^o	4"	59"	7,14	0,3250
2	5	72	6,97	0,3250
3	5 $\frac{1}{4}$	80	6,88	0,2828
4	6	83	6,85	0,3401
5	6	86	6,83	0,3150
6	7	108	6,73	0,2639
7	8	120	6,68	0,2753
8	10	151	6,60	0,2656

Summa quantitarum A , quas experimenta
haec dederunt est $= 2,3927$, unde media
 $= 2,3927 : 8 = 0,2991$. Abiecto vero expe-
rimento quarto, quippe quod maxime a ce-
teris abest, erit media ex ceteris $A = 0,2932$,
quare differentia utriusque mediae $= 0,0059$
siue fere $\frac{1}{50}$ ipsius $0,2991$.

EXPERIMENTVM XXVIII.

§. 757. Sumtis iterum duabus chartis suc-
co baccarum rhamni collitis, alteram collo-
caui in G alteram in DF, atque ut in expe-
rimentis praecedentibus quaesui distantias
GD, LC, adquam imago F & charta in D ae-
que videretur flaua, croceo fere colore con-
spicua.

spicua. Experimento octies iterato inueni fuisse.

Exp.	Ex obseruatione		Ex calculo	
	GL	LD	CF	A
1	$3\frac{1}{2}''$	$58''$	7,17	0,2597
2	4	60	7,14	0,3143
3	$4\frac{1}{2}$	69	7,01	0,2899
4	5	78	6,90	0,2714
5	5	82	6,86	0,2428
6	$5\frac{1}{2}$	89	6,83	0,2472
7	6	90	6,82	0,2868
8	6	99	6,81	0,2363

Summa quantitatum *A* hic est $= 2,1483$, unde media $= 2,1483:8 = 0,2685$. Omisso uero experimento secundo utpote a ceteris maxime recedente, est ceterorum summa $= 1,8340$, hinc *A* media $= 1,8340:7 = 0,2620$, quare differentia utriusque mediae $= 0,0065$ siue fere $\frac{1}{40}$ ipsius $0,2620$.

EXPERIMENTVM XXX.

§ 758. Simili modo chartam aerugine cupri tinctam atque ita imbutam, ut ex aduersa parte aequae fere esset viridis, in *G* erectam posui, alteram eodem modo collitam posui in *DF*, huiusque debitam quaesui distantiam, ut in experimentis praecedentibus. Experimento nouies instaurato inueni fuisse

Exp.

Exp.	Ex observatione		Ex calculo	
	GL	LD	CF	A
1	3"	63"	7,09	0,1518
2	3	75	6,96	0,1075
3	3½	86	6,85	0,1078
4	4	93	6,81	0,1190
5	4	89	6,84	0,1311
6	4	97	6,80	0,1091
7	4½	111	6,73	0,1017
8	5	116	6,70	0,1156
9	6	131	6,66	0,1219

Summa quantitatum *A* hic est = 1,0772, unde media = 0,1197. Sed omisso experimento primo, quod a ceteris nimium differt erit summa = 0,9191 unde media = 0,9191:8 = 0,1149, differentia inter utramque mediam = 0,0048 siue $\frac{1}{24}$ ipsius 0,1149. Ceterum in hoc experimento distantias GL assumpsi minores, ne nimis augeretur distantia LD, quod impediendum erat, quo facilius esset comparatio inter claritatem utriusque coloris in F & D. (§.743.)

§. 759. In tribus his experimentis literam *A* non albedinem sed colorem chartae F denotare, vel indicasse sufficit. Quidnam vero hic denotet unitas, ad quam valores ipsius *A* sunt referendi haud ita facile dignoscitur. Quod si tamen in experimento XXVIII^o (756.) minium chartae illitum rubedine gauderet purissima, ut praeter radios rubros nullos reflecteret, qui diuersi sunt coloris diuersaeque speciei, haud ego ambigerem, his exclusis,

illos solos per unitatem istam designare, ut quantitas radiorum rubrorum in chartam istam incidentium efferenda esset per *I*, quantitas reflexorum per *A*. Hoc enim casu ceteri radii, cum omnes absorberentur spectari possent ceu non incidentes.

§. 760. At vero hic omnia longe secus se habent. Nequaquam enim assumere licebit, minium omnes radios diversi coloris absorbere, atque nonnisi eos reflecti, qui rubi sunt, etsi hilutique maiori copia reflectantur. Cumque lumen candelae subflauum sit, facile patet radios coloratos ipsi non inesse in ea ratione, quae lumini vere albo debetur. Porro quaelibet radiorum species a charta pigmentata peculiari ratione reflectitur, ut adeo ratio inter eos, qui in imaginem *F* incidunt, postquam iam in *G* reflexionem passi sunt, diuersissima est ab ea ratione, qua directe in-
cidunt in *G* & *D*.

§. 761. Huius dubii discussionem uberio-
rem in sequentibus dabimus, ubi de coloribus agendum erit, hic vero sequentia notabimus, ut quid sibi velit ratio *I:A* quodammodo intelligatur.

§. 762. Radios diuersi coloris heterogeneos esse iam supra monuimus. (§. 718. seqq.) Cum vero inuicem utcunque permixti colorem quendam compositum constituent, haud ita certe heterogenei sunt statuendi, quasi omnem comparisonem respuerent, neque in summam contrahi possent. Etsi vero haftenus desint unitates, ad quam reuocari deberet eorum quantitas & intensitas, attamen experimen-

rimentis pluribus modis compare licet eorum summam. Etenim in experimentis ultimo descriptis retenta eadem candela, definita ad-est inter colores emanantes relatio, atque retenta eadem charta definita quoque est ratio inter quantitates radiorum diuersi coloris reflexas, adeoque & ratio inter eos, qui incidunt in imaginem F. Horum summam utique per unitatem exprimere licet eam, quae aderit in casu illuminationis absolutae, etsi haud constet, quotam huius summae partem singuli efficiant. Similiter charta DF a charta G absolute illuminata definitam radiorum incidentium quantitatem reflectet, quam itidem veluti in summam contractam determinare licet, etsi quantitates singulorum colorum, qui summam istam efficiunt adhucdum lateat. Hanc vero summam esse $\equiv A$, infra videbimus, ubi simul patebit, dicta quantitate radiorum ea ratione permixtorum, qua in F incidunt $\equiv I$, fore quantitatem a charta F reflexorum $\equiv A$, quomodocunque iam inuicem permixti sint.

§. 763. Pigmentum chartae tenuissime illitum, quod exempli ergo rubrum esse ponemus, omnis generis radios reflectet, quantumvis pura sit eius rubedo. Simulac enim ceteri radii, quos pigmentum istud absorbet, in ipsam chartae superficiem inciderunt, ab hac iterum magna ex parte reperiuntur. At vero pigmentum, cum ob maximam tenuitatem fere pellucidum sit, (§. 617.) transitum ipsis haud quaquam denegat, unde fit, ut plurimi eorum iterum in aerem egrediantur. Huius rei exemplum sistit utrumque experi.

perimentum XXVIII. & XXIX. Charta enim pigmento non erat imbuta verummodo illita. Hoc vero quantitas luminis reflexi notabiliter aucta est, ut ad tertiam & quartam partem luminis incidentis accederet. Fuit enim pro charta rubra $A=0,2932$, pro charta flava $A=0,2620$. Contra ea in experimento trigesimo, ubi charta aerugine viridi imbuta erat, quantitas reflexa nonam partem incidentis vix superabat. Erat enim $A=0,1149$.

EXPERIMENTVM XXXI.

§. 764. Collocata iterum in G charta cerussa pigmentata, in DF successive posui chartam albam, rubram, flauam, viridem & caeruleam obscuriorem, eodemque modo, eadem manente distantia GL, quaesui distantiam lentis, ad quam imago F aequae videretur illuminata ac charta in D. In singulis his experimentis imago eodem colore erat conspicua, quo gaudebat charta ea, qua excipiebatur. Distantia GL erat constanter 5 digitorum, atque distantiam LD pro charta DF alba, rubra, viridi & caerulea inueni fuisse circiter 64 digitorum. Contra ea pro charta flava distantia ista duobus aut tribus digitis videbatur necessario minuenda.

§. 765. Clarior itaque erat imago charta flava excepta. At vero hanc differentiam neutiquam a lumine L, neque a charta DF pendere supra vidimus (§ 742.), unde soli chartae LG videtur tribuenda. Etsi ergo huic illita erat cerussa albissima, nilominus hinc sequi videtur, & hanc albedinem eo defectu laborare,

borare, ut radios flauos copiosius reflectat. At his infra curatius pertractandis erit locus. Jam ad corpora alba reuertemur.

§. 766. Definita albedine corporis cuiuslibet, hand difficilis est comparatio inter claritatem, qua gaudet, cum a lumine quodam illuminatur, & claritatem ipsius luminis. Posita enim albedine luminis $= 1$, albedine obiecti illuminandi $= A$, sequentia hinc deducuntur theoremata.

THEOREMA XXXVI.

§. 767. *Claritas luminis est ad claritatem obiecti albi ab eo absolute collustrati ut 1 ad A.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim obiectum esset absolute album, eius claritas in casu illuminationis absolutae a claritate ipsius luminis, a quo collustratur haud differret, (§. 710. 715.) quippe omnes radios, quotquot incidunt, reflecteret. At vero cum hic minor esse ponatur albedinis gradus, haud omnes radii reflectentur, unde cum claritas decrescat in ratione radiorum reflexorum, patet eam decrescere ut 1 ad A (§. 727.)

THEOREMA XXXVII.

§. 768. *Dicta claritate luminis collustrantis $= 1$, illuminatio absoluta abit in claritatem obiecti ab eo absolute illuminati, si in vicem ipsius π substituatur albedo A .*

DEMON.

DEMONSTRATIO.

Decrescit enim claritas obiecti ut illuminatio, quare ut ex hac habeatur illa, pro π substituenda erit A . (§. 122.) Etenim in singulis formulis supra erutis illuminationem absolutam per π expressimus.

§. 769. Cum ceterae illuminationes omnes, quas in superioribus pro singulis casibus definiuimus, ad illuminationem absolutam reuocatae sint, *hoc theoremate ipsae claritates ad claritatem luminis reuocantur.* Cumque substitutione ista, quam hoc theorema praecipit, nil sit facilius, singulis istis casibus hic denuo euolendis iure meritoque supersedere licet.

§. 770. Corpus illuminatum iterum corporis illuminantis vicem sustinet (§. 703.) simulac aliud corpus opacum ipsi obuertatur. Data vero utriusque albedine, facile utriusque claritas tum inter se, tum & cum claritate luminis, a quo prius illuminatur, comparabitur. *Ut adeo omnes omnium corporum alborum claritates quibus singulis casibus gaudent inter se conferri hac ratione possint.*

THEOREMA XXXVII.

§. 771. Si duo corpora eidem lumini eodem modo obiecta aequae sint ab eo illuminata, eadem erit utriusque albedo.

DEMONSTRATIO.

Cum enim eodem modo illuminentur, eadem erit quantitas radiorum in datum spatiolum in utroque incidentium. Quare claritas tantummodo ratione quantitatis radiorum reflexorum

xorum diuersa esse poterit. At vero utriusque corporis claritas ponitur eadem, adeoque eadem in utroque erit ratio inter radios incidentes & reflexos, quod cum indicio sit eandem adesse albedinem (§. 727.) constat propositum.

§. 772. Facilis igitur est corporum aequae alborum comparatio, cum ista eidem lumini eodem modo obiicere sufficiat. Quod si enim hoc modo aequae videantur clara, ab aequali albedine haud ita multum aberunt.

§. 773. Contra ea si inaequalis prodeat claritas, aut luminis distantia, aut obliquitas incidentiae ita immutari poterit, ut ad aequalitatem reducatur. Quo facto *albedines reciproce erunt vel ut quadrata distantiae vel reciproce ut sinus incidentiae, prout vel illa vel hic mutatus fuerit.* Ceterum cum a vero aliquantum aberrare possit oculi iudicium, conuenit experimentum pluries instaurare, quo ex singulis sumi possit medium a vero minus aberrante (§. 294. 296.)

§. 774. Definita itaque albedine quadam per experimentum XXVI. (§. 747.) haud difficulter hac quoque ratione dabitur albedo cuiuscunque alius corporis, atque simul patet, murum dealbatissimum, gypsum, chartam albissimam, pigmentum ex cerussa paratum, lintea in sole candefacta, cretam albissimam cet. si albedinem spectes, parum inter se differre.

§. 775. Ut ergo hoc modo inter se comparantur albedines corporum, ab eodem lumine collustratorum, ita quoque claritas vel albedo ipsorum luminum inter se conferuntur,

tur, si ipsis eadem superficies alba exponatur, vel si eorum imagines ope lentis causticae excipiantur. Erit enim luminis claritas directe ut area aperturae lentis, reciproce ut quadratum distantiae imaginis, si haec facta sit aequae clara.

§. 776. Porro data obiecti albedine, eius claritas directe cum claritate obiecti illuminantis comparabitur, per theorema XXXVII. (§. 768. seq.)

§. 777. Sit v. gr. claritas solis ea, qua per atmosphaeram videtur, $= L$, eius semidiameter adparens $= 16'$. atque ipsi normaliter opponatur planum vel charta cerussa pigmentata, cuius albedinem supra (§. 755.) vidimus esse $= 0,4240 = A$. Dicta ergo eius claritate $= \eta$, erit (§. 121. 768.)

$$\frac{\eta}{L} = 0,4230. (\sin 16')^2 = 0,000009163.$$

siue

$$L = 109137.\eta.$$

Toties ergo claritas solis, cum per eandem atmosphaeram videtur, per quam eius radii in chartam ipsis obiectam normaliter incidunt, claritatem chartae hoc modo ab eo collustratae excedit.

§. 778. Parum itaque abest, quin singulae claritates luminum corporumque alborum ad numeros absolutos reduci possint. Equidem albedines corporum eo iam vides reductas, ut veluti per se atque independenter ab alio quocunque albedinis gradu intelligi possint, cum omnes simpliciter cum albedine absoluta
 com.

comparentur, omnesque per eam rationem exprimantur, quae est inter radios incidentes atque reflexos. (§. 740.) At vero ista ratio veluti per se subsistit.

§. 779. Secus vero rem se habere, si claritatem spectes, iam supra notauimus (§. 709.) Nulla enim hic datur unitas absoluta, ad quam ceteri claritatis gradus referri possent. Infimus itaque est 0, cum ab absolutis tenebris claritatis luminisque gradus computandi sint. Summus vero splendor in rerum natura vix datur, ut dubium sit, quinam iste esset futurus, cum vel in infinitum excurrere possit.

§. 780. Cum itaque unitas ista sit admodum arbitraria, eiusmodi assumenda erit, quae constanter proxime eadem esse reperitur. Mea quidem sententia plures assumere conuenit. Pro luminibus admodum intensis *claritatem solis* assumemus. Pro iis qui minores sunt, vel *claritatem lunae plenae* eamque visam, vel quod praestat, *claritatem plani absolute albi a sole in data distantia collustrati* unitatem alteram ponemus. Denique claritas istiusmodi plani a luna plena vel a sole in distantia vel centies millies maiori collustrati tertiae unitatis vicem sustinebit.

§. 781. Duo vero sunt, quae unitates istas vel dubias vel minus commodas reddere valent. Etenim haud constat, an perpetuo eadem sit solis claritas, etiamsi a maculis, quibus quandoque eius discus obtegatur, animum abstrahamus, utpote ob paruitatem contemnendis. Cum enim omnia, quae in hoc rerum universo sunt, admodum sint mutabilia, vix

Z

tuto

tuto assumes, unum solem ab ista mutabilitate esse liberum. Ego tamen, si quis adfirmatum eat, hanc mutabilitatem valde parvam esse, haud dissentiam.

§. 782. Alterum, quod minus commodam reddit unitatem istam, est mutabilitas atmosphaerae telluris, quam radii solares trans-eunt, antequam sese nobis spectandos sistant. Hoc vero ipso cum claritas solis oculo spectabilis vehementer turbetur, singulis casibus calculus quem infra exponemus, est subducendus, quo unitas assumpta sibi constet.

§. 783. Defectui isti, quo Photometriam adhucdum laborare supra iam monuimus (§. 11.) medelam adferre nondum valui, ut adeo proxime tantum gradus luminis ad communem quandam mensuram reuocare liceat.



PHO-

PHOTOMETRIAE

PARS IV.

QVA CALCULO ET EXPERIMENTIS

DEFINITVR

SENSVS LUMINIS

HVIVSQVE

CLARITAS ADPARENS.

CAPVT I.

Praestruitur calculus, quo definienda est claritas luminis ea, quae oculo iudice obiectis inesse videtur.

§. 784.

Eam iam Photometriae partem inchoamus, quae ceteris praemittenda fuisset, nisi ordinem hunc turbasset circulus ille logicus, quem in demonstrandis Photometriae legibus vix euitabilem esse supra diximus (§. 2. 8.) quemque iam claudemus, cum eo simus redituri, unde sumus profecti. Ita vero rem omnem a nobis peractam esse facile patebit intuenti, ut experientia duce ea tantum de claritate visa seu adparente praelibaremus, quae ad definiendam luminis claritatem veram, verasque eius modificationes vel necessario erant praestruenda, quaeque nunc demum, cum curatius euolutae sunt Photometriae leges, ad liquendum sunt perducenda, quo pateat, quatenus

nus a claritate vera differat ea, quam oculo iudice, obiectis tribuimus.

Fig. 71. §. 785. Sit igitur oculus AF, eius axis GAFM, in G sit obiectum, quod breuitatis ergo circulare ponemus, ut eius semidiameter sit Gg. Punctum G sit in axe, atque ex eo emanet radius GB, qui in B ita refringitur ut, nisi noua accederet refractione in axin incideret in M. Sit cC apertura pupillae atque ponamus radium GB esse extremum eorum qui pupillam transeunt. Radius iste incidit in chrySTALLINUM in D, ibique ita refringitur ut absque noua refractione perueniret in N. At vero cum in superficiem posteriorem chrySTALLINI incidit in E, ibi tertiam patitur refractionem, atque cum axe coincidit in F, si obiectum ad eam distantiam intueatur oculus, ad quam distincte istud videt. Ceteris casibus punctum F non erit in retina, sed vel intra vel extra oculum cadet, prout obiectum fuerit vel remotius vel propius.

§. 786. Sit porro radius gG obliquius incidens, hic iterum triplicem subibit refractionem, atque tandem in retinam incidet in f, ut adeo totius semidiametri Gg imago sit Ff.

§. 787. Producta recta gA in ϕ , constat ex theoria, quae in dioptricis traditur, esse proxime $fF = \frac{2}{3}\phi F$. Siue faciendo $KF = \frac{2}{3}AF$, ductaque KF ipsi gA ϕ parallela, erit Ff imago rectae vel semidiametri Gg. Unde ergo, data obiecti semidiametro adparente vel angulo $GAg = \phi AF$, dabitur semidiameter imaginis Ff.

§. 788.

§. 788. Fiat $Ab = AB$, atque ducta recta gb erit bgB conus extremus (§. 494.) radios eos complectens, qui e puncto g per aperturam pupillae in eius imaginem f coincidunt.

§. 789. Hinc iam haud difficulter per supra demonstrata dabitur quantitas radiorum q , qui e toto obiecto in spatium circulare cuius diameter $= Bb$ incidunt, erit enim (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi.Gg^2.AB^2}{((gb+gB):2)^2}$$

siue cum rectae gb , gB fere non differant, breuius erit

$$q = \frac{\pi\pi.Gg^2.AB^2}{gA^2}$$

§. 790. Dicta porro imaginis Ff claritate media $= \eta$, erit (§. 497.)

$$\eta = \frac{\pi.Gg^2.AB^2}{gA^2.Ff^2}$$

§. 791. Est vero proxime

$$Gg:gA = F\phi:AF$$

adeoque facta substitutione habetur

$$\eta = \frac{\pi.F\phi^2.AB^2}{Ff^2.AF^2}$$

Sed ob

$$F\phi:Ff = 3:2$$

breuissime erit

$$\eta = \frac{2}{4}\pi.tangBFA^2$$

THEOREMA XXXVIII.

§. 792. *Illuminatio absoluta est ad illuminationem imaginis in retina oculi depictae mediam, ut $\frac{4}{9}$ quadrati sinus totus ad quadratum tangentis anguli AFB .*

Z ;

THEO-

THEOREMA XXXIX.

§. 793. *Illuminatio absoluta est ad illuminationem imaginis in retina oculi depictae ut area circuli, cuius semidiameter = KF, ad aream aperturae b AB.*

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 791.)

$$\eta = \frac{\pi \cdot F\phi^2 \cdot AB^2}{Ff^2 \cdot AF^2}$$

Sed vidimus esse (§. 787.)

$$F\phi:Ff = AF:KF$$

quare facta substitutione erit

$$\eta = \frac{\pi \cdot AB^2}{KF^2}$$

unde

$$\pi:\eta = \pi \cdot KF^2:\pi \cdot AB^2$$

Sunt vero $\pi \cdot LF^2$, $\pi \cdot AB^2$ areae circulorum, quas effert theorema, quare &c.

§. 794. Patet ergo hinc, claritatem imaginis a distantia obiecti esse independentem, nisi haec admodum fuerit parva, quo vero casu imago Ff haud erit distincta, atque calculo opus erit, qui prorsus similis erit illi, quem supra lentibus causticis adplicauimus. (§. 538. seqq.)

§. 795. Pendet vero claritas imaginis a pelluciditate humorum oculi, potissimum chrySTALLINI, quippe qui crescente aetate admodum flavescit. Porro quantitas quaedam radiorum in superficies refringentes B, D, E incidentium, ab istis reflectitur, quam, medium quoddam sumendo, sextam fere incidentium partem esse autumo. Quatenus vero hanc constantem ponere licet, claritas imaginis erit

erit in ratione composita areae pupillae & illuminationis absolutae. Haec vero cum unice ab ipso obiecti splendore pendeat, consequens est; *manente pupillae apertura obiectum eo clarius videri, quo clarius reipsa fuerit, atque eatenus claritatem adparentem cum vera coincidere.* At vero haec secus se habent, cum apertura ista, aucta luminis claritate & magnitudine, minuat, unde, quod in sequentibus agemus, quaerendum est, quaenam sit inter tres istas quantitates relatio atque habitus. Iam vero videbimus, quaenam prodeat claritas obiectorum, si oculus perspicillis armetur. Eo vero brevioribus in hisce perquirendis esse licebit, quo plura iam eaque maxime uniuersalia hac de re reperias in operibus quae de re optica scripserum viri cel. SMITHIVS & KAESTNERVS.

§. 796. Sit ergo oculus PF, eius axis EPF, Fig. 72. semidiameter pupillae Pp. Obiecti semidiameter Gg axi normaliter insistat, ipsumque obiectum interposita lente AB distincte videatur. EP sit distantia ea, ad quam oculus non armatus distincte videt. Ducatur recta Ep, lentem in D transiens, atque erit GDE via radii extremi, qui pupillam ingrediatur, ut omne lumen e puncto G in oculum incurrens contineatur intra conum, cuius axis GC, semidiameter baseos = CD.

§. 797. Facile vero patet hunc conum ob refractionem mutatum iri, atque ita in oculum incidere radios, quibus ille constat, quasi emanarent e puncto E, atque conum coefferent, cuius axis EP, semilatio baseos Pp.

§. 798. Per centrum pupillae P agatur recta PBe, rectam Ee ad axin normalem decussans, puncta e, C nectantur recta egC, eritque gBP via luminis e puncto obiecti g in oculum irruentis, atque obiectum Gg per lentem eodem modo videtur, ac si remota lente volumine auctum esset in Ee.

§. 799. Breuitatis ergo ponemus esse Ee obiecti Gg imaginem, patetque singulas eius partes auctas esse in ratione rectae GC ad rectam EC. Concipiamus iam in G spatiolum infinite paruum cuius area sit $= 1$, erit area imaginis istius spatioli in E $= EC^2 : GC^2$. At vero quantitas radiorum in spatium circulare lentis, cuius diameter $= 1$, incidentium erit reciproce ut quadrata rectarum GC, EC, directe vero ut areae spatiolorum G, E. Quaecum sint directe ut ista quadrata, patet has rationes sese mutuo destruere. Ut adeo eadem radiorum quantitas in spatium CD incidat, siue ista e spatiolo G $= 1$, siue ex eius imagine E $= EC^2 : GC^2$ emanet. Cumque porro quantitas haec in utroque casu pupillam oculi Pingrediatur, sequens hinc elicitur

THEOREMA XL.

§. 800. *Eadem est claritas obiecti Gg per lentem AB visae, quae foret claritas eius directe visae, si esset in EC.*

DEMONSTRATIO.

Etenim quantitas radiorum e spatiolo G eiusque imagine E per pupillam in retinam oculi incidens est eadem, & utraque in idem retinae

retinae spatium incidit, cum ope lentis non ipsum obiectum verum eius imago videatur. Sed habetur claritas vel illuminatio retinae, si quantitas radiorum per aream, in quam ibidem coincidunt, diuidatur. Cum vero in utroque casu utraque sit eadem, constat propositum.

Aliter

Sit semidiameter spatioli $G = 1$, imaginis $= r$, quantitas radiorum in circulum CD incidentium e puncto $G = g$, e puncto $E = Q$, erit ob utrumque spatium infinite paruum (§. 222.)

$$g = \pi \pi . CD^2 : GD^2$$

$$Q = \pi \pi r^2 . CD^2 : ED^2 .$$

$$1 : r = GD : ED$$

adeoque erit

$$Q = \frac{\pi \pi . CD^2}{GD^2} = g .$$

Eadem ergo quantitas radiorum in utroque casu in idem spatiolum retinae incidit. Unde eadem quoque erit illuminatio eademque claritas visa.

§. 801. Alteram hanc adiunximus demonstrationem, quo apertius pateret, quatenus extendi hoc theorema absque notabili errore possit. Posuimus vero

$$1 : r = GD : ED$$

cum deberet esse

$$1 : r = GC : EC$$

patet ergo hanc positionem a vero parum fore aberraturam, quoties CD ratione distantiae GC fuerit paruitatis contemnendae, ut ponere liceat $GC = GD$, $EC = ED$. Quod vero semper obtinebit, nisi lens AB fuerit segmen-

Z 5

tum

tum sphaerulae minutissimae. Ceteris casibus a vero vel nihil aberrabit, neque opus erit, ut obiectum ponatur in F, cum, quod supra vidimus, eius claritas visa sit constans. Praestat tamen istud esse intra limites visionis distinctae.

§. 802. In hoc computo iterum negleximus quantitatem luminis dispersi & reflexi, qua lumen in lentem incidens atque per eam refractum minuitur, quamque supra, si lens adhibeatur mediocriter pellucida sextam fere partem luminis incidentis esse vidimus. Ceterum theorematis veritas experientia quotidiana constat.

§. 803. Etsi vero eadem prodeat claritas visa, siue obiectum per lentem videatur, siue nudo oculo id intuearis, dantur tamen casu quibus aliam ob causam notabilis interest differentia. Etenim apertura pupillae non modo pendet a claritate obiecti verum & ab eius magnitudine adparente. Ponamus ergo Gg esse flammam candelaе, eamque noctu per lentem AB ita intueatur oculus, ut magnitudo adparens notabiliter augeatur, eadem quidem erit imaginis claritas, at cum haec maior adpareat quam ipsa flamma directe visa, consequens est, coarctatum iri pupillam, quo ipso claritas visa imaginis minuitur, etsi manente apertura pupillae claritati luminis directe visi fuisset aequalis.

Fig. 73. §. 804. Sit PQ oculus, GPQ eius axis, interpositis duabus lentibus bc, BC intueatur obiectum Gg, atque quaerenda sit eius claritas

tas adparens, Sit DP distantia, ad quam oculus obiecta distincte videt, Pp aperturæ pupilla semidiameter, Ff imago obiecti, GBFbp sit via radii e puncto G, quod in axe est in extremitatem pupillae incidentis, debebit CB esse apertura lentis obiectivæ, bc apertura lentis ocularis, si omnes radii, qui hoc modo refracti pupillam ingredi possunt, reipsa ingredi debeant, atque etiamsi utraque maior esset, haud tamen plures radii pupillam transirent. Secus est si alterutra apertura minor fuerit, tunc enim Pp non erit tota pupillae apertura, verummodo pars ea, quam radii e puncto G in oculum irruentes replent. Cuiusnam ergo aperturæ quidquam detrahatur ex principiis dioptricis in dato quovis casu facile determinabitur. Nobis vero hic radius GBFbp erit extremus eorum qui e puncto G, quod in axe est in retinam pertingunt.

§. 805. Ut iam definiatur claritas centralis, sit Gg semidiameter spatioli infinite parvi, ducta gCf erit Ff eius imago, radius gf in γ incidens, ibique refractus pergit in P, ibique denuo refractus in punctum retinae q incidit. Producta recta γP in r, erit proxime $qQ = \frac{2}{3} Qr$ siue facta $QK = \frac{2}{3} QP$, ductaque Kq erit haec ipsi Pr parallela, ut adeo Qq sit obiecti Gg imago in retina depicta. Denique demissa normali Dd, productaque Pg in d, erit d punctum in recta cf eousque producta.

§. 806. Omissa iterum quantitate luminis ab oculo & lentibus reflexi & dispersi, assumemus omne lumen e spatio Gg in aperturam CB incidens, incidere quoque in eius imaginem

ginem Qq . Unde dabitur huius imaginis claritas, si quantitas ista per spatium Qq diuidatur. Dicta ergo quantitate ista $= q$, erit (§. 222.)

$$q = \frac{\pi \pi . Gg^2 . CB^2}{GB^2}$$

At vero area spatii Qq est $= \pi . Qq^2$, quare posita claritate in $Q-\eta$, erit

$$\eta = \frac{\pi . Gg^2 . CB^2}{GB^2 . Qq^2}$$

§. 807. Vocetur angulus $CGB = \phi$ erit $GB = GC . \sec \phi$. estque porro $gG : GC = Ff : CF$

Quare erit

$$\frac{gG}{GB} = \frac{gG}{GC . \sec \phi} = \frac{Ff}{CF . \sec \phi}$$

quo valore substituto prodit

$$\eta = \frac{\pi . Ff^2 . CB^2}{CF^2 . \sec \phi . Qq^2}$$

§. 808. Dicatur porro angulus

$$GCg = FCf = \omega$$

$$CP\gamma = rPQ = \nu$$

erit

$$Ff : CF = \text{tang} \omega$$

$$Qq : QK = \text{tang} \nu$$

adeoque substitutione facta

$$\eta = \frac{\pi . \text{tang} \omega^2 . CB^2}{\sec \phi^2 . \text{tang} \nu^2 . QK^2}$$

§. 809. Claritas obiecti Gg nudo oculo visa sit $= c$, erit (§. 793.)

$$c = \frac{\pi . Pp^2}{QK^2}$$

unde

quo definienda est claritas luminis ea, quae &c. 365

unde

$$1:QK^2 = \frac{c}{\pi.Pp^2}$$

Quare iterum substituendo habetur

$$\eta = \frac{c.tang\omega^2.CB^2}{sec\phi^2.tangv^2.Pp^2}$$

§. 810. Est porro

$$Dd = PD.tangv = Ff.Dc:Fc$$

unde

$$tangv = Ff.cD:DP.Fc$$

sed

$$tang\omega = Ff:CF$$

Quare

$$tang\omega:tangv = DP.Fc:CF.cD$$

Unde

$$\eta = \frac{c.CB^2.DP^2Fc^2}{sec\phi^2.Pp^2.Dc^2CF^2}$$

At vero est

$$DP:Pp = Dc:cb$$

&

$$bc:Cb = Fc:CF$$

adeoque substitutione facta tandem prodit

$$\eta = c\cos\phi^2.$$

Hinc liquet

THEOREMA XLI.

§. 811. Si apertura pupillae fuerit ea, quae debetur radio extremo GBFbp, claritas obiecti directe visa erit ad eiusdem claritatem per utramque lentem visam ut quadratum sinus totius ad quadratum cosinus anguli BGC.

§. 812. Utraque ergo erit aequalis, si obiectum fuerit velut infinite remotum. At vel maxime notandum est, aperturam pupillae nobis hic brevita-

uitatis ergo esse spatium eius circulare, cuius semidiametrum Pp abscindit radius extremus GBFbp. Hoc vero spatium quandoque verae eius aperturae posse esse aequale supra vidimus, at nunquam maius esse potest.

§. 813. Cum claritas per hoc pupillae spatium directe visa sit (§. 809.)

$$C = \frac{\pi \cdot Pp^2}{QK^2}$$

erit substitutione facta

$$\eta = \frac{\pi \cdot Pp^2}{\sec \phi^2 \cdot QK^2}$$

§. 814. Est vero spatium istud circulare Pp basis conii luminosi qui eos radios complectitur, qui e puncto G in retinam incidunt, cuiusque figura ob refractionem ita mutatur, ut iam eius apex sit in D. Porro si obiectum fuerit velut infinite remotum, erit $\sec \phi = 1$. quare

THEOREMA XLII.

§. 815. *Illuminatio retinae Q est ad illuminationem absolutam ut area baseos conii DPp ad aream circuli semidiametro QK descripti, si nempe obiectum sit infinite remotum, sin minus, illuminatio retinae insuper minuenda erit in ratione duplicata cosinus anguli BGC.*

§. 816. Sit iam aperturae pupillae semidiameter vera $= p$. claritas obiecti nudo oculo visa $= C$, erit (§. 793.)

$$C = \frac{\pi \cdot p^2}{QK^2}$$

ad.

adeoque

$$C:n = p^2: Pp^2 \cdot \cos \phi^2$$

Hinc liquet

THEOREMA XLIII.

817. *Claritas obiecti directe visa est ad eam, quae per utramque lentem videtur, ut factum ex quadrato sinus totius in aream pupillae ad factum ex quadrato cosinus anguli BGC in aream baseos conii PDp.*

§. 818. Si Cc fuerit tubus astronomicus, basis conii PDp longe minor est area pupillae, cum noctu lunam intuemur. Unde adeo etsi ob magnitudinem lunae adparentem vehementer auctam pupilla coarctetur, rarius tamen ita coarctabitur, ut obliquitas radii extremi GBFbp non ab apertura lentis obiectivae sed ab ipsa pupillae apertura pendeat.

§. 819. Et in his animum abstraximus ab ea radiorum quantitate, quae a superficiebus lentium & oculi reflectitur & dispergitur, cum per ea, quae supra demonstrata sunt (P. II. C. III. & IV.) haud difficulter in calculum induci possit. Ceterum vel me tacente patescit, quantitatis eius, quae a superficiebus humorum oculi reflectitur tunc tantum rationem esse habendam, cum quaeritur illuminatio retinae cum illuminatione absoluta comparanda. Quodsi vero claritates visae inter se comparandae sint, a quantitate ista abstrahere licet, cum singulae eodem modo minuantur.

§. 820. Cum claritas visa a magnitudine imaginis Ff non pendeat, facile patet, eadem
theo-

theoremata valere, si plures interponantur lentes vel specula. Hisce ergo iam, utpote a cel. SMITHIO & KAESTNERO uberius pertractatis, coronidem imponemus.

CAPVT II.

Experimentis & calculo exploratur ratio, quam inter se seruant apertura pupillae & claritas luminis eiusque magnitudo adparens.

§. 821. **A**perturam pupillae ad uniuersalem quandam mensuram reuocare, eiusque ad luminis magnitudinem atque intensitatem rationem atque habitum ita calculo perlustrare, ut theoria inde extruenda omnibus numeris sit absoluta, vel ideo nondum licet, quod vera processuum ciliarium causa vel maxime est dubia, atque solertissimis anatomicorum perscrutationibus etiamnum sese subducit. Hoc ergo modo rem istam delibare constitutum est, ut ea praemittantur, quae vel experientiae communes vel experimenta data opera eundem in finem instituta docuerunt, atque porro ex his deducantur positiones a vero tantum non notabiliter aberrantes. Hac enim ratione vel inchoasse sufficiet, cum detur frui iis, quae proxime vera sunt, donec olim ipsa veritas in aprium sit proditura.

§. 822. Primo igitur constat vel simplici oculorum intuitu, figuram iridis in genere, pupillae vero in hominibus plurimisque animalibus

malibus esse circularem. Quare cum ex superioribus constet, claritatem imaginis in retina oculi depictae in eadem ratione crescere, in qua crescit pupillae apertura, patet hoc incrementum per quadrata diametrorum efferri posse eorumque sequi rationem.

§. 823. Porro observationibus constat, pupillam, cum in eam irruiat lumen intensissimum veluti solare, adeo contrahi ut instar puncti haberi possit. Contra ea in tenebris densissimis apertura ad totam fere iridis aream excrescit. Ut adeo pro lumine infinito diameter pupillae statui possit ∞ , in tenebris absolutis haud ego ambigerem eam diametro iridis ponere aequalem, concedendum certe erit quoddam spatium, quod & tunc, quum maxima est pupillae apertura, non excedet.

§. 824. Dandum quoque id est consuetudini, ut pupilla statum quendam, quem medium vocare licebit, affectet, atque ab utroque extremo, de quo iam praefati sumus, veluti abhorreat. Cum enim rarissime lumen solare intueamur, immo ob dolorem, quem inde patitur oculus, hunc ilico iterum auertamus, hinc fit, ut fibrillae, a quibus ad maiorem contractionem sollicitatur iris, paulatim veluti durescant, minusque contractioni isti adsuefiant.

§. 825. Neque minus est evidens, pupillae aperturam non modo pendere a claritate imaginis in oculo, verum & ab eius magnitudine. Ut adeo si claritas obiecti fuerit eadem, eo magis contrahatur pupilla, quo maior fuerit obiecti imago in retina depicta. Contra ea,

si magnitudo imaginis duorum obiectorum eadem fuerit, illud pupillae aperturam reddet contractiorem, quod clarius fuerit.

§. 826. Duo porro sunt, quae deprehendere mihi visus sum. Primo enim ab eodem obiecto luminoso longe magis contrahi pupillam vidi, si istud in ipso axe oculi fuerit situm, quam cum extra axin istum fuerit. Rationem phaenomeni pro eo casu, quo radii valde oblique in oculum incidunt, facile vel inde petenda est, quod minori copia incidunt, maiori vero reflectantur. At haec tunc tantum obtinent atque notabiliora euadunt, ubi declinatio radiorum ab axe ad 20 vel plures gradus excurrit. At vero iam notabilem inveni differentiam, cum vix 5 aut 6 graduum erat ista declinatio. Eam itaque inter processus ciliares & visionem distinctam esse pono analogiam ut minores sint, ubi obiectum vel minime ab axe oculi distat.

§. 827. Alterum, quod obseruasse mihi visus sum hoc est, ut magis ampliatur pupilla, ubi ad videndum obiectum oculi acies intenditur. Hoc vero iterum fit, ut eas tantum motus persentiamus, quibus eae fibrillae, quae in axe oculi sunt, sollicitantur, haud secus ac si omnes earum vires veluti in punctum contraherentur, ibique coniunctae sese exfererent, ubi axis oculi retinam transit.

§. 928. Variarum hae circumstantiae, consuetudo ceteraque causae minus notae aperturam pupillae in variis subiectis reddunt variam, ut vix generale quicquam statuere liceat. Quodsi ergo in sequentibus specialiora
occur-

occurrant, haud ea omnia singulis quibuscumque oculis erunt applicabilia, methodo vero, quam describam, quaque ista peruestigavi, tutius quilibet utetur, cui de suis oculis periculum facere volupe fuerit.

§. 829. Contractionem pupillae non ab eo lumine pendere quod in ipsam iridem incidit, verum vel maxime ab eo, quod per pupillam ad ipsam retinam pertingit, hoc modo euinci posse inueni.

EXPERIMENTVM XXXII.

§. 830. Sumta eadem lente, quam in experimento XXVI & seqq. adhibui, quaeque sit AB, hanc ita inter flammam candelae L & oculum PO collocaui, ut distantia LA triplicem fere eius distantiam focalem excederet, oculusque esset in ipsa imagine quod interposito speculo in E facile videre poteram. Quo facto dedi operam ut imago apicis flammæ sese in ipsa iride depingeret, nullumque lumen incideret in pupillam, Post in speculo utriusque oculi imaginem intuens, vidi utramque pupillam aequè esse ad sensum apertam. At vero situ lentis vel oculi ita immutato ut vel minima pars imaginis flammæ in pupillam incideret, hanc momento citius contractam vidi, atque vel triplo minor euasit, cum tota imago in eam incidebat. Experimenti pluries iterati idem fuit euentus.

§. 831. Experimento hoc patere videtur, unicam certe præcipuam processum ciliarium causam in fundo retinae quaerendam esse, ut adeo pupillae contractio non ab ea obiecti claritate immediate pendeat,

Fig. 74.

quae vera est, verummodo ab ea qua gaudet eius imago in retina depicta. Haec vero cum vice versa pendeat ab ipsa pupillae apertura, patet dependentiam istam esse mutuam.

§. 832. Hinc facile stabiliuntur positiones sequentes. *Manente imaginis magnitudine apertura pupillae erit ut functio claritatis qua gaudet. Eadem enim fibrillae a lumine feriuntur. Quare cum quaelibet eo magis ad motum cieatur, quo intensius fuerit lumen in eas incidens quoque adeo clarior fuerit imago, constat propositum.*

§. 833. Adfluxus luminis in oculum continuus est, adeoque continuo a luminis radiis feriuntur fibrillae in retina. Oportet ergo motus hinc enascens ulterius propagetur, atque concipienda erit quaedam eius cumulatio, qua fit ut fibrillae istae non modo a singulis luminis pulsibus tendantur, verum & in motu tremulo, vel quicunque tandem hic fuerit, aliquandiu perseuerent. Quod vel experientia quotidiana apertissime demonstrat. Sic enim solem intuentes citissime iterum oculis auersis eius imaginem variis coloribus tinctam cernunt. Sic quoque filum vel baculum citissime circa axin vel centrum, rotatum totam circuli ab eo descripti aream spectabilem sistit. Huc quoque referas experimentum a Cel. KAESTNERO in praeclaro optices systemate pag. 430. descriptum, quo eiusmodi motum gyratorium eumque velocissimum ad exhibendas colorum miscelas adhibet. Idem quoque deprehendes noctu si ipse oculus flammam candelae in-

tuens

intuens velocissime auertatur, flammam enim veluti caudatam videbit, etsi velocissime tinue istud caudae lumen evanescat.

§. 834. Huic cumulationi motus tremuli magna ex parte tribuenda est successiva pupillae variatio. Aucta enim luminis claritate successive tantum motus iste cumulatur & ad statum permanentiae pertingit, eodemque modo imminuto lumine successive iterum amittitur cumulatio ista, quae iam nimia est. Ex his vero iam per se elucescit, nequaquam simplicem esse functionem istam claritatis imaginis, qua apertura pupillae est exprimenda. Unde eam in sequentibus per adplicatas cuiusdam curvae exhibebimus.

THEOREMA XLIV.

§. 835. *Si ad lumen constantis claritatis accedamus vel ab eo recedamus, apertura pupillae constanter proportionalis est intensitati luminis fibrillas retinae ferientis.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ob claritatem luminis constantem, constans quoque est illuminatio absoluta, quare vi theorematis XXXIX. (§. 793.) illuminatio imaginis simpliciter erit in ratione aperturae pupillae. Unde cum vice versa haec sit ut illuminatio, erit ea quoque ut intensitas luminis fibrillas retinae ferientis, quippe haec cum illuminatione coincidit.

THEOREMA XLV.

§. 836. *Si a lumine vel obiecto constantis claritatis continuo recedamus, continuo augetur eius claritas adparens. Accedendo vero ad lumen istud, eius claritas adparens minuetur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim a lumine recedendo ampliatur pupilla, adeoque per theorema praecedens augebitur imaginis claritas, adeoque & obiecti vel luminis claritas adparens. Contrarium locum habere, cum ad lumen accedimus vel per se patet.

THEOREMA XLVI.

§. 837. *Tota vis luminis in oculum irruentis est factum ex area imaginis in aream pupillae ducta, si idem intueamur lumen.*

DEMONSTRATIO.

Vis luminis quamlibet fibrillam ferientis est ut apertura pupillae, quare habebitur eius summa, si apertura ista per aream imaginis multiplicetur.

§. 838. Duo tamen sunt, quae circa haec theoremata notanda veniunt. Primo enim a veritate aliquantum recedent, ubi luminis magnitudo adparens tanta fuerit, ut eius imago retinam magna ex parte repleat. Hoc enim casu lumen obliquius incidens minus est intensum, quare summa virium calculo differentiali erit peruestiganda.

§. 839. Alterum, quod concinnitatem horum theorematum turbat, obtinebit, cum magnitu-

gnitudo luminis admodum fuerit parua, neque eius imago fuerit in ipsa retina. Quo casu visio non est distincta, cum radii qui in punctum coincidere deberent iam in circellum incidant. Quare de hoc casu eadem notanda sunt, quae supra de lumine per lentem causticam refracto atque extra focum plano albo excepto demonstrauius (§. 538. seqq.) Hic vero breuitatis ergo ab utroque hoc casu animum abstrahemus, atque ponemus imaginem esse eam, quae spatium retinae repleat inter utrumque istud extremum veluti medium.

THEOREMA XLVII.

§. 840. *A lumine duplo, triplo &c. n tuplo non potest pupilla ita contrahi ut eius apertura prioris parti dimidia, tertiae &c. n tae euadat aequalis, verum his partibus maior erit.*

DEMONSTRATIO.

Prius enim sit esset, claritas imaginis foret constans, cum haec constanter sit ut factum ex claritate obiecti in aperturam pupillae.

Posita ergo illa $= n$, hac $= \frac{1}{n}$ foret $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Quare cum contractio pupillae pendeat a claritate imaginis, consequens est hanc augeri, aucta claritate obiecti, ut adeo posita hac claritate $= n$, apertura pupillae debeat esse $> \frac{1}{n}$.

§. 841. Obtinet hoc theorema siue claritas siue magnitudo adparens luminis siue factum ex utraque n tuplicetur, atque vel inde

quoque euidens est, quod $\frac{1}{n}$ aream iridis nunquam excedere possit.

§. 842. Quaelibet fibrilla in retina oculi seorsim est spectanda, cum verosimile sit, quamlibet independentem a ceteris ad contractionem pupillae concurrere. Etsi enim concedamus motum istum tremulum & cum ceteris adiacentibus communicari, hoc tamen positioni isti nil detrahit. Quantum enim cum iis communicatur tantum ipsi decedit, ceteris accedit, quare contractio nilominus erit ut summa motus hac ratione inter plures distributi. Id ergo, quod a qualibet fibrilla proficiscitur contractionis augmentum necessario est ut functio causae, adeoque ut functio luminis eam ferientis. Huius vero intensitatem vidimus esse ut factum ex claritate obiecti & area pupillae.

§. 843. Porro etsi fibrillae axi oculi viciniore vel a natura vel a consuetudine sensibiliores sint, atque intendatur earum vis pupillam contrahens, cum intenditur oculi acies, praeteraeque constet & ipsos animi adfectus pupillam ampliari vel contrahere posse, ut adeo difficillime quicquam definiatur, quod uniuersale sit: sequentia tamen assumemus a vero haud ita multum aberrantia.

Fig. 72. §. 844. Primo enim fibrillas axi oculi vel fundo retinae F viciniore eadem vi contrahenti gaudere ponemus, ut eadem fere gaudent sensibilitate. Consuetudini deberi hanc maiorem sensibilitatem vel inde constare puto, quod in oculo limo non eae fibrillae quae in F sunt

sunt verum aliae a fundo retinae F remotiores sensibilitate ista gaudent.

§. 845. Porro qualescunque sint istae vires pupillam contrahentes, eas veluti in potestate esse vel inde patet, quod dum oculus obiectum enixius intuetur, veluti in F concentrentur, quo maior euadat oculi acies. Mutabile ergo esse videtur spatium sensibilitatis maiorisque vis contrahentis. Sit eius semilatitudo Ff , haec utique augebitur, ubi mere passivae se habet oculus, quod ergo in sumendis experimentis probe erit observandum.

§. 846. Cum ergo assumi absque notabili errore possit, dari quoddam spatium, in quo singulae fibrillae, cum ab eodem lumine in motum cientur, aequale contractionis augmentum producant, facile patet, si imago spatio isto haud fuerit maior, pupillae contractionem efferri posse per summam augmentorum istorum aequalium, adeoque functionem, de qua supra praefati sumus (§. 842.) per aream imaginis esse multiplicandam, quo tota eruatur pupillae contractio.

§. 847. His ita praestructis dicatur apertura pupillae, cum maxima est $=a$, atque erit a vel exacte vel proxime areae totius iridis aequalis. Intueatur iam oculus lumen vel obiectum quoddam, atque fiat

huius obiecti claritas $=x$

area imaginis in retina $=y$

area pupillae respondens $=x$

claritas imaginis $=y$

Aa §

atque

atque erit $y = \kappa x$, contractio pupillae $= a - x$, quae erit summa singularum contractionum partialium.

Fig. 75. §. 848. Quaecumque vero contractio partialis ita reperitur. Vidimus eam esse functionem intensitatis luminis fibrillas ferientis, quam diximus $= y$. Cum vero functio ista adhucdum lateat, ponamus curvam AMN esse talem, ut si abscissa AP sit $= y$, applicata PM functionem istam siue contractionem cuilibet fibrillae debitam exhibeat. Sit area fibrillae $= d\eta$, erit contractio respondens $= -dx$, atque proinde

$$-dx = PM.d\eta$$

Quare

$$a - x = \eta.PM.$$

§. 849. At vero est

$$AP = y = \kappa x,$$

quare

$$x = \frac{AP}{\kappa}$$

unde porro facta substitutione

$$a - \frac{AP}{\kappa} = \eta.PM$$

§. 850. Assumta iam abscissa AQ $= ax$, erit

$$a = AQ : \kappa$$

adeoque

$$\frac{AQ - AP}{\kappa} = \eta.PM.$$

unde fit

$$\frac{PQ}{PM} = \eta\kappa = \cotang. MQP.$$

Quod si

Quodsi erga constructa sit curua, haud difficulter dabitur pupillae apertura datae obiecti claritati dataeque eiusdem magnitudini adparenti respondens. Facta enim $AQ = ax$, angulus MQA sumatur talis, ut eius cotangens sit $= nx$, ductaque QM ex M demittatur MP atque erit pupillae area $x = AP : n$.

§. 851. Hinc corollarii loco esto: Si claritas obiecti n fuerit constans erit AQ constans, cum sit $= ax$, quare pro quavis area imaginis n dabuntur anguli MQA , quorum cotangentes $= nx$, adeoque & aperturae pupillae respondentes $x = AP : n$. Ut iam hunc casum experimento definiamus, sequens praestruemus

LEMMA I.

§. 852. Si oculus AB semetipsum intueatur in Fig. 76. speculo CD , erit diameter pupillae pq in superficie speculi circino capta dimidia pars diametri verae AB siue semidiametro verae aequalis.

DEMONSTRATIO.

Etenim distantia imaginis Pp eadem est quae distantia ipsius oculi Ap , unde fit $AP : Ap = 2 : 1$. Porro est $PQ = AB$, quare erit $pq = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}AB$.

EXPERIMENTVM XXXIII.

§. 853. In camera probe clausa probeque Fig. 77. obscurata unicum in fenestra apertum reliqui foramen circulare, cuius diameter $= 0,302$ unius pedis, per quod incideret lumen caeli maxime sudi ab ea parte quae a sole erat auersa. Quo facto a fenestra recessi, sumtoque speculo

lo pq, lumen caeli per foramen DE intuens exspectavi, usque dum acquireret pupilla aperturam huic lumini debitam. Parato porro circino in superficie speculi cepi aperturae istius diametrum. Dedi vero operam ut citissime mensura haec caperetur, atque ea capta, postmodum ita verificaretur, ut experimento eodem modo instaurato viderem, an sibi constaret nec ne. Experimentum eadem manente distantia pluries iteraui, atque ex cunctis ita medium sumsi, ut tertiam fere eorum partem reiicerem, quae pupillae aperturam exhiberent maiorem ea, quae ex ceteris prodibat. Metuendum enim erat, ne iterum ampliaretur pupilla duplicem ob causam, quippe imago oculi in speculo erat obscurior, atque ad capiendum mensuram semidiametri pq intendebatur eius acies. His usus cautelis distantiam AC ita immutavi, ut successive esset 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 pedd. atque experimentum eodem modo iteraui. Tandem ut haberem foraminis DCE semidiametrum adparentem, eius semidiametro vera $DC = 0,151$ per distantiam AC diuisa elicui angulorum DAC tangentes atque proinde ipsos angulos. Semidiametros pq cepi in lineis digiti parisini, earumque partibus decimalibus. Unde tandem sequens nata est tabella.

Distant.

Distant. AC	angulus DAC	Diam. pupillae AB obseru.	Diam. AB correcta.
pedd.	o ,	lin.	lin.
1	8 - 36	1,14	1,13
2	4 - 20	1,50	1,44
3	2 - 53	1,70	1,70
4	2 - 10	1,89	1,93
5	1 - 44	2,08	2,15
6	1 - 26 $\frac{1}{2}$	2,31	2,36
7	1 - 14	2,53	2,56
8	1 - 5	2,78	2,75
9	0 - 58	2,89	2,93
10	0 - 52	3,15	3,10

Diametrum totius iridis inueni = 4,70. Correctas vero pupillae diametros eodem modo quaesiui, quo supra (§. 396. seqq.) aberrationes obseruationum haud euitabiles ad legem quandam magis homogeneam reduci posse ostendimus.

§. 854. Cum in his experimentis figura pupillae, imaginis & iridis sit circularis, atque diameter imaginis poni possit in ratione constanti diametri obiecti adparentis, singularum areas simpliciter per quadrata diametrorum exprimemus, cum hic tantummodo ratio inter areas pupillae & imaginis sibi respondentis quaeratur. Quare ponendo $a = (4,70)^2$, ex tabella praecedente concinnatur sequens, in qua diametros pupillae adhibui correctas.

Dist.

Fig. 75.

Dist.	x	η	$a - x$	PM
1	12,769	2663,56	2071,31	0,777
2	20,736	676,00	2001,64	2,961
3	28,900	299,29	1920,00	6,414
4	37,249	169,00	1836,51	10,866
5	46,225	108,16	1746,75	16,150
6	55,696	74,82	1652,04	22,080
7	65,536	54,74	1553,64	28,371
8	75,625	42,25	1452,75	34,384
9	85,849	33,64	1350,51	40,146
10	96,100	27,04	1248,00	46,154

Cum enim hoc casu claritas obiecti $\propto$ sit constans, eam ponemus $=1$, unde erit $AQ=a=2209,00$, $AP=x$, $PQ=a-x$, adeoque $PM=PQ:\eta$ (§. 850.) Ut adeo hoc modo detur ratio inter intensitatem luminis retinam ferientis & contractionem cuilibet fibrillae ab ipso percussae vel spatiolo retinae debitam. Est enim contractio $=PM$, & ob $\propto=1$, intensitas luminis $y=x\propto$ euadit $y=x$.

Fig. 78.

§. 855. Ut vero numeri huius tabellae ad certas definitasque unitates reuocentur, ponenda

claritas caeli sudi $AQ = 1$

area iridis - - - $a = 1$

area pupillae - - - $= x$

claritas alia quaelibet $Aq = \propto$

semid. obiecti adparens $= s$

Unde erit area imaginis $\eta = m(\sin s)^2$

Quodsi iam curuae AMN abscissae AP sint $= y = x\propto$, adplicatae respondentes PM exhibeant contractionem cuilibet fibrillae vel spatiolo

tiolo retinae debitam, erit $PM = n(1-x) : n$
adeoque breuius

$$PM = \frac{(1-x)\mu}{\sin s^2}$$

&

$$x = \frac{AP}{Aq}$$

unde

$$PM = \frac{Pq \cdot \mu}{Aq \cdot \sin s^2}$$

hinc porro

$$\frac{\mu}{\sin s^2} = \mu \cdot \operatorname{cosec} s^2 = \frac{Aq \cdot PM}{Pq} = Ap.$$

§. 856. Coefficiens μ per unicam observationem & per assumptam scalam pro construenda curua AMN determinatur. Quo facto rectae Ap adscribi poterunt semidiametri obiecti adparentes, atque singuli casus, qui occurrere possunt facili constructione resolventur.

§. 857. Sit v. gr. semidiameter $Ap = 60'$, claritas obiecti $= Aq$, ducta pMq , atque demissa ex M normali MP , erit apertura pupillae $= AP : Aq$. Curuam, qualem eam sistit fig. LXXVIII, hac ratione construxi, atque rectae Ap scalam semidiametrorum obiecti adscripsi, quatenus ea per tabellam praecedentem extendere licuit. Jam vero hanc tabellam ad praefinitas unitates reuocatam hic exhibebo.

Dist.

Dist. obiecti	Apertura pupillae x	Obiecti semid. adparens s	Area imaginis $\pi \sin^2 \eta$	PM — $(1-x)$
1	0,0578	8° - 36'	0,07025	13,43
2	0,0938	4 - 20	0,01794	50,51
3	0,1308	2 - 53	0,007954	113,96
4	0,1686	2 - 10	0,004492	193,52
5	0,2092	1 - 44	0,002875	289,17
6	0,2525	1 - 26 $\frac{1}{2}$	0,002011	393,10
7	0,2962	1 - 14	0,001456	513,52
8	0,3423	1 - 5	0,001123	626,81
9	0,3886	0 - 58	0,0008942	735,50
10	0,4350	0 - 52	0,0007188	850,58

§. 858. Curvae AM ordinatae initio crescunt ut quadrata abscissarum, post vero simpliciter ut abscissae, atque tandem in minori ratione, quod vel ex figura patet. Denotant vero abscissae $AP = y = xz$ claritatem imaginis siue vim luminis retinam ferientis, & ordinatae PM respondentes contractionem cuius fibrillae vel dato cuius spatiolo retinae debitam, ut adeo hinc manifestum fiat, rationem inter utramque non esse simplicem. Etsi vero curva per experimentum praecedens tota construi atque absolui non possit, plura tamen ipsius symptomata in antecessum definire licet. Quem in finem sequentia notabimus.

§. 859. Scala Ap, cui adscriptae sunt diametri obiecti adparentes in infinitum excurrit, & eousque extendi poterit, dato tantummodo unico puncto curvae M.

Vidi-

Vidimus enim esse (§. 855.)

$$\mu \cdot \operatorname{cofec} s^2 = \frac{Aq \cdot PM}{Pq} = Ap$$

Sit iam semidiameter s infinite parua, erit

$$Ap = \mu \cdot \operatorname{cofec} s^2 = \infty$$

Porro datis Aq , Pq , PM , s per unicum experimentum dabitur coefficientis μ , ceteris casibus omnibus inferuiens.

§. 860. Similiter etsi curua ultra punctum N non sit producta, dabuntur tamen aperturæ pupillæ pro singulis claritatibus obiecti, simulac eius semidiameter adparens non fuerit $\angle 69'$. Est enim Aq claritas obiecti, quæ ergo si ponatur infinita, recta qN euadet axi Aq parallela eritque NR . At vero in R abscindit $69'$, quæ ergo est obiecti semidiameter minima, qua obtinente apertura pupillæ pro quauis obiecti claritate definiri poterit. Quodsi vero assumatur semidiameter minor, claritas obiecti maxima, cui pars curuæ AMN satisfaciet finita erit.

§. 861. Curua AN in infinitum excurrit. Quodsi enim obiecti semidiameter adparens sit infinite parua, erit $Ap = \infty$, adeoque qp euadit ipsi Ap parallela, unde punctum curuæ M puncto axis q normaliter imminet. Cum vero Aq sit claritas obiecti, hæc in infinitum excurrit, quare & ipsa curua ramum habet in infinitum excurrentem.

§. 962. Carua AN conuergit ad asytmoton axi AQ parallelam. Est enim AP claritas imaginis, PM contractio cuius fibrillæ vel spatiolo retinæ debita. Quæ cum in infinitum non excrescat, patet PM datam magnitudinem

Bb

non

non excedere. Ad hanc ergo continuo propius accedet. Quare cum curua in infinitum excurrat (§. 861.) patet eam ad asymptoton conuergere.

§. 863. Aequationem, quae & tabellae §. 857. & symptomatibus eius iam definitis, proxime satisfacit, hanc esse inueni. Vocetur $PM = z$, ob $AP = y = x$ erit proxime

$$z = \frac{vy^2}{a + y^2} = \frac{vx^2}{a + x^2}$$

Huius aequationis coefficientes v , a per eas observationes definiui, quae distantis 6, 10 in tab. §. 857. respondent, ita tamen ut facerem $PM = 1000$. & unde habui

$$0,85058 \cdot (0,4350)^2 + 0,85058 a = (0,4350)^2 \cdot v$$

$$0,39310 \cdot (0,2525)^2 + 0,39310 a = (0,2525)^2 \cdot v$$

hinc

$$a = 0,27387.$$

$$v = 2,08145.$$

adeoque

$$z = \frac{2,08145xx}{0,27383 + xx}$$

siue

$$z = \frac{2,08145 \cdot yy}{0,27383 + yy}$$

Aequatio posterior uniuersalis est, quia unico tantum casu est $y = x$, cum nempe est $x = 1$ siue claritati coeli sudi aequalis.

§. 864. Sic v. gr. erit

$$y = 0,1$$

$$z = 0,073$$

$$= 0,2$$

$$= 0,265$$

$$= 0,3$$

$$= 0,515$$

$$= 0,4$$

$$= 0,767.$$

$$= 0,5$$

$$= 0,993.$$

&c.

&c.

infin.

$$= 2,081$$

distancia Asymptoti.

Notabilius ergo haec formula a vero aberrat initio, siue id inde sit, quod aperturae pupillae minores minus exacte definiri possint, siue formula his casibus reipsa a vero aberret. Dubium hoc soluere dabitur, si unquam eo perducatur theoria processuum ciliarium, ut formula inde erui possit ea, quae veritati ex asse satisfaciat. An experimenta hoc capite descripta quicquam conferre possint hi dispi- ciant, quibus in causam processuum cilia- rium inquirere animus est & vis ingenii. Ego quidem ea hic fusius non perscrutabo, cum nimis specialia sint quae inde consequuntur, quam ut singulis oculis adplicari possint. (§. 828.)



PHOTOMETRIAE

PARS V.

QVA INVESTIGATUR DISPERSIO
LUMINIS

MEDIA DIAPHANA

POTISSIMUM ATMOSPHERAM
TELLVRIS PERAGRANTIS

CAPVT I.

Debilitatio luminis media minus diaphana
potissimum aerem permeantis.

§. 865.

Et si tum in superioribus tum & praecipue in libro cel. BOVGVER iam saepius laudato plurima occurrant, quae ad determinandam debilitationem luminis in mediis diaphanis faciunt, nobis tamen hic velut ab ovo repetenda res est, cum ea non modo uniuersaliter sit absoluenda, verum & casibus specialioribus adplicanda veniat.

§. 866. Lumen dispergi a particulis heterogeneis, quibus corpora diaphana plus minusue scatent, supra iam passim notauimus (§. 320. 322. 323. 466. seqq.) Eas itaque spectare licet ceu obstacula, quae lumen in via sua offendit, & a quibus intercipitur. Huiusmodi obstacula in vitro sunt bullulae vel vesiculae vacuae, quales & in glacie ingenti copia

pia inveniuntur. Eiusmodi quoque esse in interstitiis aquae ceterorumque fluidorum dubio carere videtur, cum spectandas se sistant, simulac a calore aer ipsis inclusus dilatatur. Bullulis istis accedunt particulae terrenae aliaeque heterogeneae quam plurimae, quae omnes luminis progressum plus minusve impediunt, prout maiorem ipsis obiciunt superficiem. Aerem semper maxima copia vaporum aliarumque particularum e corporibus terrenis effluentium onustum esse vel in vulgus notum est.

§. 867. Lumen in superficies istarum particularum incidens variis modis intercipitur atque dispergitur, quo fit ut non omne istud, quod inciderat, recta pergere possit. Quae ratione dispergatur in sequentibus videbimus, iam id acturi, ut dispiciamus, quatenam sit quantitas ea, quae intercipitur, cuiusque lumen recta pergens facit iacturam.

§. 868. Concipiamus eiusmodi particulam esse sphaericam, atque facile patet omne istud lumen ab ea interceptum iri, quod normaliter incideret in planum circulare cuius diameter diametro sphaerulae istius est aequalis. Etenim diuersa incidentiae obliquitas tantummodo dispersionem luminis non item quantitatem interceptam reddit variam.

§. 869. Quod iam insuper ponamus lumen particulam istam prope superficiem praetergrediens, quacunque demum ex causa inflecti, alia quoque eius pars ita dispergitur, ut residuo, quod recta pergit, adnumerari amplius non possit.

§. 870. In utramque hanc causam curatius esset inquirendum, si quaelibet particula seorsim esset spectanda. At vero tanta est figurae, magnitudinis & vis inflectentis diuersitas quae calculum plane respuit. Quare eos tantum casus perlustrabimus, quibus lex quaedam generalior adcommodari poterit. Quem in finem sequentia praestruemus.

§. 871. Primo enim utraque haec dispersionis causa ita combinabitur commodissime, si in vicem superficiei particulae lumen intercipientis assumamus aliam maiorem, quae omne istud lumen quod dispergitur intercipere valeat. Hac enim ratione lumen istud dispersum uno velut actu segregatur ab eo, quod ad metam pertingit, cuiusque quantitas inuestiganda est.

§. 872. Porro ut in quolibet corpore diaphano mirum in modum inter se differunt particulae lumen intercipientes, ita eas vel aequaliter vel aequabiliter in medio pellucido disseminatas esse assumendum erit, alias enim ab omni calculo esset abstrahendum.

§. 873. Sic v. gr. in vitro, aqua ceterisque fluidis aequae densis probeque permixtis aequalis disseminatio particularum assumitur, quod & pro vitro in superioribus iam fecimus. (§. 466 seqq.) Contra ea in aere utique inaequaliter eas disseminatas esse ponendum est, simulac diuersa atmosphaerae strata inter se comparentur. At si idem stratum spectetur, disseminatio ista ponetur aequalis, atque absque notabili errore hac hypothese
uti

uti licebit, nisi inter se comparentur partes eiusdem strati admodum dissitae.

§. 874. Luminis intercepti quantitas eo maior est, quo plures in eodem spatiolo fuerint particulae intercipientes, quoque maior fuerit singularum superficies, spatiolum istud ponamus infinite paruum, atque quantitas luminis intercepta erit ut summa obstaculorum siue superficierum ipsi obiectarum; Hanc vero summam per spatiolum diuisam vocabimus densitatem obstaculorum, atque eandem medi diaphani impelluciditatem denotare per se est euidens.

§. 875. Sit iam medium diaphanum CB, Fig. 79. lumen in istud incidat secundum directionem AB, sitque densitas incidentis $= 1$. Dum vero in P peruenit sit densitas residua $= v$, via percursa $AP = x$, spatiolum $Pp = dx$, densitas obstaculorum in hoc spatiolo $= \delta$, debilitatio luminis ipsi debita $= -dv$, atque erit (§. 467.)

$$-dv = v\delta \cdot dx$$

adeoque

$$\log \left(\frac{1}{v} \right) = \int \delta dx.$$

Est vero $\int \delta dx$ summa obstaculorum, quae lumen viam AP percurrente offendit, unde

THEOREMA XLVIII.

§. 876. Logarithmus luminis residui, dum in medio minus diaphano debilitatur, est in ratione summae obstaculorum cunctorum, quae in via ab ipso percursa offendit, qualicunque demum modo obstacula ista in medio percursu sint disseminata & qualiscunque sit curuatura viae.

DEMONSTRATIO.

Est enim δdx factum ex via percursa infinite parva & densitate obstaculorum, quare cum habeatur obstaculorum quantitas si eorum densitas δ per spatium dx multiplicetur, erit δdx obstaculorum quantitas in via percursa dx , adeoque $\int \delta dx$ erit summa obstaculorum in tota via percursa x disseminatorum. Quae summa cum sit $= \log \frac{I}{v}$, constat propositum.

THEOREMA XLIX.

§. 877. Si particulae lumen intercipientes sint aequaliter disseminatae, logarithmus debilitationis luminis erit factum ex impelluciditate medii in viam percursum ducta.

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc casu δ est constans, quare formula eruta

$$\log \frac{I}{v} = \int \delta dx$$

abit in sequentem

$$\log \frac{I}{v} = x\delta$$

unde evidens fit propositum.

Fig. 80. §. 878. Sit iam AE superficies telluris, C eius centrum, AB altitudo aeris lumen intercipientis, PMmp stratum, aeris quodlibet, lumen incidat in A secundum DMA, hanc eius viam hic ponemus rectilineam, cum eius curvado admodum sit exigua. Sit porro
femi-

semidiameter telluris $CA = r$.
 via percurrenta $AM = x$
 densitas obstaculorum in $M = \delta$
 densitas luminis in $M = v$

erit (§. 876.)

$$\log v = \int \delta dx.$$

Porro vocetur

angulus $BAD = \gamma$

altitudo strati $EM = y$

erit

$$\cos \gamma + x = \sqrt{(\cos^2 \gamma + 2y + yy)}$$

unde

$$dx = \frac{(1+y)dy}{\sqrt{(\cos^2 \gamma + 2y + yy)}}$$

Siue ponendo breuitatis ergo $2y + yy = zz$, erit

$$dx = \frac{zdz}{\sqrt{(\cos^2 \gamma + zz)}}$$

adeoque

$$\log v = \int \frac{\delta z dz}{\sqrt{(\cos^2 \gamma + zz)}}$$

§. 879. Ponendo porro $CM = r$, erit $rr = 1 + 2y + yy = 1 + zz$ adeoque formula haec facili substitutione facta abit in sequentem

$$\log v = \int \frac{\delta zz \cdot \sec \gamma}{\sqrt{(rr + zz \cdot \tan^2 \gamma)}}$$

siue radice reipsa extracta

$$\log v = \sec \gamma \cdot \int \frac{\delta z dz}{r} - \frac{\sec \gamma \cdot \tan^2 \gamma}{2} \cdot \int \frac{z^3 dz}{r^3} + \frac{1 \cdot 3 \sec \gamma \cdot \tan^4 \gamma}{2 \cdot 4} \cdot \int \frac{\delta z^5 dz}{r^5} \&c.$$

§. 880. Integralia huius seriei sunt functiones altitudinis strati EM, atque ab angulo inclinationis BAD non pendent. Quodsi ergo tantummodo quaeratur debilitatio luminis quum totam atmosphaeram siue viam DA percurrit, singula ista integralia spectari poterunt ceu coefficients. Quare ponendo

$$\int \frac{\delta z dz}{r} = A$$

$$\int \frac{\delta z^3 dz}{r^3} = B$$

$$\int \frac{\delta z^5 dz}{r^5} = C$$

&c.

erit

$$\log \left(\frac{1}{v} \right) = A \cdot \sec \gamma - \frac{1}{2} B \sec \gamma \cdot \tan \gamma^2 +$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} C \sec \gamma \cdot \tan \gamma^4 -$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} D \sec \gamma \cdot \tan \gamma^6 + \&c.$$

§. 881. Series haec maxime est conuergens. Est enim tota altitudo aeris lumen intercipientis AB ratione ipsius semidiametri telluris AC paruitatis contemnendae, atque vix $\frac{1}{30}$ eius partem superabit. Quare cum sit $\gamma < \frac{1}{30}$ erit $2\gamma < \frac{1}{30}$. Cumque sit $r > 1$, series magis conuergit, quam geometrica cuius exponens est $\frac{1}{30}$. Unde nisi angulus ad 80. & plures gradus excurrat, primus seriei erutae terminus voto velut ex asse satisfaciet, eritque

log.

$$\log. \frac{I}{v} = A. \sec \gamma.$$

Quae eadem formula prodiisset, si strata aeris plana esse posuisssemus.

§. 882. Coefficientes A, B, C &c. in horas mutantur, cum maxime variabilis sit aeris constitutio. Eadem quoque vaporum quantitas lumen per athmosphaeram incidens plus minusque intercipit atque dispergit, prout vel visibiles sunt veluti nubes, vel inuisibiles veluti cum caelum est sudum. Quare cum vix generale quicquam in his statui possit, methodum tamen exemplo illustrabimus, qua definiendi sunt coefficientes A, B, C , ut datis quibuscumque casibus specialibus adplicari possit. Atque primo formulam simpliciore

$$\log \frac{I}{v} = A. \sec \gamma$$

retinebimus, utpote quae angulis γ tantum non omnibus satisfacit.

§. 883. Lumen in D incidens posuimus $= 1$, eritque ergo hoc lumen solare ante eius in aerem ingressum. Cum peruenit in A debilitatur in ratione $1:v$. At vero haec ratio experimentis directe determinari nequit. Quare sequenti modo res erit absoluenda.

§. 884. Lumen secundum directionem DA in A incidens sit $= v$, secundum directionem FA ponatur $= V$. atque variis modis experimentis definiri poterit ratio inter v & V , hanc ergo ut & angulos respondentes BAD , BAF ceu datos assumimus. Cumque sit

— log

$$-\log v = A \sec BAD$$

$$-\log V = A \sec BAF$$

erit

$$A = \log \frac{V}{v} : (\sec BAD - \sec BAF)$$

Ut adeo hac ratione detur coefficientis *A*.

§. 885. Experimenta hunc in finem instituit cel. BOVGVER atque inuenit, lumen solare in altitudine 66° esse ad idem lumen in altitudine 19° ut 3 ad 2. Erat ergo

$$V:v = 3:2$$

$$BAG = 24^\circ$$

$$BAF = 71^\circ$$

Quare

$$A = \log \frac{3}{2} : (\sec 71^\circ - \sec 24^\circ)$$

unde adhibendo logarithmos Briggsianos habebitur

$$A = 0,089073.$$

Adeoque erit

$$-\log v = 0,089073 \sec \gamma$$

§. 886. Pro angulo incidentiae recto est $\sec \gamma = 1$, quare

$$-\log v = 0,089073$$

sive

$$v = 0,8146.$$

Ut adeo si lumen solare verticaliter incideret in atmosphaeram pars eius circiter quinta ab aere interciperetur. Quae quidem admodum parua videtur, quippe cel. BOVGVER experimentum ad superficiem maris adeoque in infimo atmosphaerae telluris superficiem obtegentis strato instituit. Ego vero Curiae Rhezorun, ubi altitudo barometri media est 26 dig. parif.

paris. inueni hanc debilitationem longe esse maiorem. Experimentum in *Pyrometria* descriptum dabo, cum principia quibus innititur hic desint. Eo vero per diem integram continuato inueni lumen verticaliter in atmosphaeram delabens debilitari in ratione 100 ad 59, siue fere 5:3, unde eius debilitationem ad maris superficiem hac certe non esse minorem meo iure infero. Est ergo pro angulo $\gamma = 0$, $v = 0,59$, adeoque

$$\log v = \log 0,59 = -0,229148$$

$$A = 0,229148$$

Unde

$$\log \frac{I}{v} = 0,229148. \sec \gamma.$$

siue, quod hic fere perinde est

$$\log \frac{I}{v} = 0,23. \sec \gamma.$$

Hinc calculo subducto sequentem concinnaui tabellam, quae exempli loco erit

altitudo sideris	debilitatio luminis v	altitudo sideris	debilitatio luminis v
90	0,5889	40	0,4387
80	0,5841	30	0,3467
70	0,5692	20	0,2126
60	0,5425	10	0,0476
50	0,5009	lumen extra aerem	1,0000

§. 887. Ceteri coefficientes seriei erutae (§. 880.) successive definiendi sunt, quod eodem

dem fere modo perficere licebit, quo in tra-
 ctatu : *Les propriétés remarquables de la route de la*
lumière par les airs, coefficientes seriei, qua ex-
 hibentur refractiones astronomicae definiui.
 Sumtis enim successive angulis γ maioribus,
 successive quoque termini seriei primum se-
 quentes notabiliores fiunt, quam ut reiici pos-
 sint. Unde adeo successive definietur coeffi-
 ciens A , atque hoc dato, coefficientes B , quo
 inuento habebitur coefficientes C &c.

§. 888. Cum logarithmus debilitationis lu-
 minis sit summa obstaculorum, quae lumen
 in via sua offendit, independenter a curvatura
 viae & disseminatione obstaculorum (§. 876.)
 hinc concipere licebit atmosphaeram ita esse
 depressam, ut disseminatio ista ubique sit ae-
 qualis. Hinc curtanda erit luminis via, cum
 iam obstacula ista sibi sint viciniora, eaque
 gaudeant densitate, quae est ad ipsam telluris
 superficiem.

§. 889. Ut ergo videamus, qua ratione
 via ista pro varia incidentiae obliquitate sit
 curtanda, primo ponemus strata depressa na-
 turalibus ipsique telluris superficiei esse con-
 centrica. Sit ergo C centrum telluris, AR
 eius superficies, AB altitudo atmosphaerae
 naturalis, $PMmp$ stratum naturale quodlibet.
 Hoc depressum sit in $QNnq$. Vocetur

$$AC = r.$$

$$CP = r$$

$$CQ = e$$

$$\text{angulus } BAD = \gamma$$

Densitas in M siue in P fiat $= \delta$, densitas ad
 superficiem telluris $= 1$, atque patet fore

$$de = \delta \cdot dr$$

Ita

Ita enim stratum Pp deprimendum est ut obstacula in Qq sint aequae densae ac in A.

§. 890. Similiter patet debere esse $Nn = \delta.Mm$, cum lumen spatiolum nN percurrendo aequae debilitari debeat, ac si percurreret spatiolum Mm. At vero facile ostendi poterit esse $Nn > \delta.Mm$. Est enim

$$AM = \sqrt{(rr - \sin \gamma^2)} - \cos \gamma$$

$$AN = \sqrt{(ee - \sin \gamma^2)} - \cos \gamma$$

Quare differentiando

$$Mm = \frac{rdr}{\sqrt{(rr - \sin \gamma^2)}}$$

$$Nn = \frac{ede}{\sqrt{(ee - \sin \gamma^2)}}$$

§. 891. At lumen utrumvis spatiolum permeando aequae debilitatur, quare cum densitas in M sit $= \delta$, in N $= 1$, erit

$$\frac{\delta r dr}{\sqrt{(rr - \sin \gamma^2)}} = \frac{ede}{\sqrt{(ee - \sin \gamma^2)}}$$

Sed ob

$$Qq = \delta.Pp$$

erit

$$de = \delta.dr$$

unde substituendo deberet esse

$$\frac{r}{\sqrt{(rr - \sin \gamma^2)}} = \frac{e}{\sqrt{(ee - \sin \gamma^2)}}$$

adeoque

$$1 - \sin \gamma^2 : rr = 1 - \sin \gamma^2 : ee$$

sive

$$r = e$$

Est vero

$$r > e$$

quare

quare erit quoque

$$Nn > \delta.Mm$$

§. 892. Aut ergo curtanda aut incuruanda erit via luminis in aere depresso. Priori casu superficies aeris depressi haud erit superficiei telluris concentrica, cum via quaevis AN breuior euadat, ac foret si circuli QN, quem superficiem istam denotare ponemus, centrum esset ipsum centrum telluris C. Unde si forte fortuna superficies ista QN esset sphaerica, huius diameter diametro telluris esset minor.

§. 893. Posteriori casu strata aeris depressi concentrica esse poterunt, at facile euincetur viam luminis ita esse incuruandam, ut breuior fiat. Vocetur ergo

$$\text{angulus } Mm\mu = \omega$$

$$Nn\nu = \phi$$

atque erit spatium

$$Mm = dr. \sec \omega$$

$$Nn = de. \sec \phi$$

Sed debet esse

$$Nn = \delta.Mm$$

quare erit

$$\delta.dr. \sec \omega = de. \sec \phi.$$

Est vero

$$\delta.dr = de$$

unde erit

$$\sec \omega = \sec \phi$$

siue

$$\omega = \phi.$$

Quod si ergo via luminis per atmosphaeram esset logarithica spiralis, eadem quoque foret eius via per aerem depressum. Hoc enim casu foret $\omega = \phi$.

§. 894. Alter casus quo est $\omega = \phi$ obtinet, ubi singula strata fuerint plana, atque lumen ista recta percurrat.

§. 895. Sit ratio inter sinus inclinationis & refractionis luminis dum ex aere qui est in M incidit in aerem, qui est in A, $= m:1$, via luminis in aere naturali erit talis ut sit

$$\sin \omega = m. \sin \gamma$$

r

Ponamus porro viam luminis in aere depresso esse rectilineam, erit

$$\sin \phi = \frac{\sin \gamma}{\frac{r}{q}}$$

At debet esse $\phi = \omega$, quare esset

$$\frac{m}{r} = \frac{1}{q}$$

siue

$$m:1 = r:q$$

Quod si ergo ratio inter semediametros r, q esset eadem, quae est inter sinus inclinationis & refractionis luminis, cum ex aere M immediate incidit in aerem A, via luminis in aere depresso esset rectilinea. At vero ratio prior posteriorem longe excedit, quare via luminis in aere depresso ita est incurvanda, ut concavitatem rectae AB obuertat, adeoque breuior erit, quam recta AN.

§. 896. At vero via luminis in aere depresso commodius assumitur rectilinea. Videamus ergo, qua ratione ista erit curtanda. Sit C centrum telluris, CA eius diameter, AB altitudo aeris naturalis, cuius superficies BMQ

Fig. 82

superficiei telluris sit concentrica. Porro sit AP altitudo aeris depressi verticalis, PNR eius superficies, PE radius circuli curvam PNR

Cc

in

in P osculantis. Ponamus iam lumen verticaliter incidens per rectam PA debilitari in ratione $1:V$, lumen secundum NA obliquius incidens minui ut 1 ad v , atque erit (§. 877.)

$$\log \frac{1}{V} = n.AP.$$

$$\log \frac{1}{v} = n.AN.$$

adeoque

$$AP:AN = \log \frac{1}{V} : \log \frac{1}{v}$$

§. 897. Cum iam rationes $1:V$, $1:v$ experimentis dentur, dabitur quoque ratio inter AP & quamcunque AN, ut adeo adplicatae AP dato cuique angulo PAN respondentes quotlibet ex observationibus deduci possint.

§. 898. Sit v. gr. $1:V = 5:3$, & $1:v$ pro lumine horizontali $RA = 2000:1$, erit

$$AP:AR = \log 5 : \log 2000.$$

adeoque

$$AP:AR = 0,2218488 : 3,3010300$$

Ponamus puncta P, R esse in circulo, cuius centrum sit E, fiatque $AE = a$, $EP = ER = b$, erit

$$AP = b - a$$

$$AR = \sqrt{(bb - aa)}$$

unde

$$AP:AR = 1 : \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$$

$$\sqrt{(b-a)} : \sqrt{(b+a)} = 0,2218488 : 3,3010300$$

$$(b-a) : (a+b) = 0,0491226 : 10,8967991$$

$$b:a = 1,0090568$$

adeo-

adeoque angulus

$$\text{AER} = 7^{\circ}, 41'.$$

Quodsi ergo curua PNR esset circularis, arcus inter verticem P & horizontem R foret $7\frac{2}{3}$ gr. Quae curuatura cum sit satis exigua, atque debilitatio luminis pro ratione obliquitatis incidentiae valde uniformiter crescat, eiusmodi circulum absque notabili errore verae curuae substituere licebit.

§. 899. Semidiametrum huius circuli semidiametro telluris AC notabiliter esse minorem supra iam notauimus. (§. 892.) Quae nam vero inter utramque sit ratio experimentis difficillime detegetur. Omnibus tamen rite perpensis altitudinem AP unum milliare germanicum haud excedere pono. Quare cum sit

$$b:a = 1,009:1$$

erit

$$(b-a):a = 9:1000 = 1:111.$$

ut adeo semidiameter vel potius distantia centri a superficie telluris AE esset circiter 111 mill. germ. At radius telluris est fere 860 mill. germ. adeoque fere octies maior.

CAPVT II.

Indagatur claritas, qua lumen in mediis diaphanis, potissimum vero in athmosphaera telluris dispersum, media ista spectanda exhibet.

§. 900. Inter media diaphana, quae ob dispersionem luminis veluti colore quodam tincta spectabilia sunt, eminent

aqua marina & aer. Illam viridem hunc vero caeruleum & quandoque sole nempe in horizonte versante rubicundum prae se ferre colorem neminem fugit. Utrumque vero hunc casum eodem prorsus perlustrandum esse calculo vel per se patet. Unde posteriorem potissimum explorare propositum est, huncque, quantum eius fieri licebit, ad priorem utpote faciliorem, reducemus.

§. 901. Ne vero omnes difficultates, quae hic occurrunt, iam initio simul in calculum inducantur, primo ponemus strata aeris esse plana, atque hoc assumpto calculum rudiorum praestruemus sequentem in modum.

Fig. 83. §. 902. Sit AB superficies telluris quantumvis extensa, CD superficies atmosphaerae ipsi AB parallela. Radii solares in hanc incidunt sub directione CA, DB, atque eorum quantitas, cum normaliter in CD incidunt dicatur 1, quantitas sub angulo CAB incidentium sit $=q$. erit

$$q = \sin CAB.$$

Porro summa obstaculorum in recta verticali AE vocetur $=\delta$, erit summa eorum, quae lumen in via sua offendit $=\delta \cdot \sec EAC$. Ab his lumen debilitetur in ratione 1:v, erit (§. 876.)

$$\log \frac{1}{v} = \delta \cdot \sec EAC$$

sive dicto $\log e = 1$, erit

$$v = e$$

§. 903. Sit angulus $EAC = \gamma$, atque debita substitutione facta prodit quantitas luminis, quod

qua lumen in mediis diaphanis, potissimum &c. 405

quod directe in AB peruenit, quodque dicemus λ ,

$$\lambda = \cos \gamma \cdot e$$

sive

$$\lambda = \cos \gamma \cdot e$$

§. 904. Hinc ergo erit lumen in aere dispersum

$$q - \lambda = \cos \gamma (1 - e)$$

Hoc lumen iam ita dispergitur, ut pars eius superiora petat, pars altera in superficiem telluris incidat, tertia vero particulis aeris ita inuoluatur, ut pro destructo haberi possit, etsi mea quidem sententia non possit non esse valde exigua.

§. 905. Ob infinitas luminis in aere reflexiones utraque pars prior ab aequalitate parum recedit, unde lumen inferiora petens dimidiaei parti luminis dispersi aequale statuemus, eritque ergo

$$l = \frac{1}{2} \cos \gamma [1 - e]$$

§. 906. Quodsi iam ponamus superficiem AB esse velut infinite extensam, omne hoc lumen in eam incidet, atque claritas hinc nascens ubique erit aequalis. Effcerri itaque poterit per

$$l = \frac{1}{2} \cos \gamma [1 - e]$$

Sed claritas, quae debetur lumini, quod directe in AB peruenit, est (§. 903.)

$$\lambda = \cos \gamma \cdot e$$

adeoque ratio inter utramque erit

$$\lambda : l = 2e : [1 - e]$$

Cc 3

adeo-

§. 907. Quodsi lumen in AB directe incidens excipiatur plano ad directionem radiorum normali, dicta huius plani claritas $=L$, erit

$$L = e^{-\delta : \cos \gamma}$$

adeoque $L:l = 2e^{-\delta : \cos \gamma} [1 - e^{-\delta : \cos \gamma}]$

§. 908. Ex his iam formulis, ponendo ut supra (§. 886.)

$$-\log v = 0,23 \cdot \sec \gamma$$

sequens concinnatur tabella

alt. $\odot$	L	λ	l
90	0,5889	0,5889	0,2060
80	0,5841	0,5752	0,2048
70	0,5692	0,5348	0,2024
60	0,5425	0,4698	0,1981
50	0,5009	0,3837	0,1911
40	0,4387	0,2820	0,1804
30	0,3467	0,1734	0,1633
20	0,2126	0,0727	0,1346
10	0,0476	0,0082	0,0827

§. 909. Tabellam hanc haud secus ac praecedentem (§. 866.) exempli ergo adiecimus. Denotat vero columna prima gradus altitudinis solis, secunda illuminationem plani radiis solaribus per atmosphæram debilitatis normaliter obuersi, tertia illuminationem eiusdem plani horizonti paralleli atque nonnisi a solis radiis directe illuminati, quarta denique illuminationem eiusdem plani, a toto caeli sudi hemisphaerio, sed ab eo solo collustrati.

§. 910.

§. 910. Triplici vero haec tabella nititur hypothefi, quare iam dispiciendum est, quatenus ea ad verum accedat. Primo quidem aeris impelluciditatem assumimus eam, quae lumen solare verticaliter incidens debilitat in ratione $5 : 3$. Hoc vero nequaquam semper obtinet, cum maxime variabilis sit aeris pelluciditas. At vero si haec vel minimum mutetur, numeri tabellae eorumque ratio notabiliter immutantur. Ponamus v. gr. debilitationem verticalem esse ut $3 : 2$, erit pro altitudine solis $= 90^\circ$, $L = \lambda = 0,6666$, & $l = 0,1666$. adeoque quantitas L iam parte fere octaua est auctior, l vero parte quarta minor, ac est in tabella. Unde hoc casu $L : l = 4 : 1$ at in tabella $L : l < 3 : 1$. Secundum cel. BOVGVER fuit $v = 0,8146$, (§. 886.) adeoque si aer adeo sit pellucidus, erit pro altitudine solis $= 90^\circ$, $L = \lambda = 0,8146$, adeoque $l = 0,0927$, quare $L : l = 9 : 1$. Quae ratio vel triplo maior est.

§. 911. Patet ergo hinc tabellam cuilibet aeris constitutioni peculiariter esse adcommo-
dandam, siquidem ceterae duae hypothefes tolerabiles fuerint. Harum altera haec fuit. Lumen dispersum in aere ita diuidi, ut pars eius dimidia superiora petat, pars altera deorsum vergat. Quod si secus hoc sit, immutanda erit illuminatio l , quippe quae sola ab ista hypothefi pendet, adeoque ponendo deorsum vergere partem n tam faciendum erit

$$l = n \cdot \cos \gamma [1 - L]$$

Ceterum positio $n = \frac{1}{2}$ eo magis ad veritatem accedet, quo minor fuerit angulus incidentiae

CAB, atque exacte obtinebit, si sol fuerit in horizonte. Lumen enim a particulis aeri innatantibus, quas cunctas sphaericas esse hic statuere licebit, per conos dispergitur, quorum axis directioni radiorum AC est parallela. Sic claritatem aeris imagini solis vicinioris ita decrefcere videmus, ut eo minor sit, quo maior est eius a centro imaginis distantia adparens. Quantumvis ergo pro ratione huius distantiae inaequaliter dispergatur, sole in horizonte versante, dimidium conorum istorum segmentum, quod fit secundum axin, inferiora petit, adeoque dimidia radiorum dispersorum pars deorsum vergit. Quodsi altitudo solis sat fuerit notabilis, erit $n > \frac{1}{2}$, quo ipso claritas athmosphaerae una cum illuminatione intenditur. Quare hoc respectu numeri columnae l sunt veluti minimi.

§. 912. Tertia hypothesis, calculum quem ipsi superstruximus tunc tantum notabiliter turbat, cum sol horizonti est proximus. Posuimus vero strata aeris esse plana. Hoc vero notabiliter protenditur via luminis fere horizontalis, atque in infinitum excurrit, quum altitudo solis est $= 0$. Quod vero cum re ipsa secus sit, tabella ultra angulum $\gamma = 70^\circ$ vel 75° extendi vix poterit. Porro & iis casibus quibus angulus BAM minor est, lumen a particulis horizonti AQ vicinioribus dispersum re ipsa minus est, cum longitudo rectarum AQ minor sit ea, quae foret, si strata aeris essent plana atque in infinitum extensa. At vero haec in ∞ intuitio numeros tabellae parum reddit varios. Non modo enim lumen a particulis

Fig. 82.

culis horizonti proximis obliquius incidit, atque hanc ipsam ob causam illuminationem plani horizontalis parum auget, verum & lumen a particulis a plano A remotioribus in A incidens, ob longiorem viam ita debilitatur, ut fere nullum sit, adeoque perinde erit, siue strata aeris in infinitum excurrant, siue particulae istae plane absint. Ut adeo hoc saltem respectu numeri columnae quartae, qui altitudinibus solis maioribus respondent, salui maneant.

§. 913. Quodsi ergo inter rationes

$$L:l = 3:1$$

$$= 4:1$$

$$= 9:1$$

quas ante definiuimus (§. 910.) medium sumamus, atque, ponamus claritatem caeli sudi mediam esse eam, quae plani horizontalis illuminationem faciat sextam partem eius, quae obtinet, cum idem planum radiis solaribus in altitudine 90 gr. normaliter obuertitur, claritas ista media eaque visa ita definietur.

§. 914. Illuminatio plani a toto caeli hemisphaerio collustrati est illuminatio absoluta (§. 100.) quam ergo ponemus $= \pi$. Posita semidiametro disci solaris $= 16'$ atque in D concipiatur segmentum sphaericum cuius semidiameter itidem sit $= 16'$, erit illuminatio hinc nascens in C

$$\eta = \pi. (\sin 16')^2 = 0,00002166.\pi$$

Sed illuminatio quae directe a sole prouenit est $= 6\pi$. qua ergo dicta I , erit

$$\eta : I = 0,00002166 : 6$$

siue

Cc 5

$\eta:I$

Fig. 11.

$$\eta : I = 1 : 277000.$$

Toties ergo claritas solis, cum in aere medio-
criter puro vertici propior est, claritatem cae-
li sudi mediam superat.

§. 915. Supra vidimus albedinem chartae
cerussa pigmentatae esse $= 0,4230$. (§. 755.)

Quae ergo si radiis solaribus normaliter ob-
uertatur erit eius claritas, posita claritate,
cum absolute illuminatur $= 6\pi \cdot 0,4230$,

$$i = 6\pi \cdot (\sin 16')^2 \cdot 0,4230$$

sive

$$i = 0,00005498 \pi$$

adeoque

$$\eta : i = 1 : 2,538 = 2 : 5$$

Ut adeo claritas chartae cerussa pigmentatae
& a sole in altitudine 60° harente normaliter
collustratae claritatem caeli sudi mediam $2\frac{1}{2}$
vicies superet.

§. 916. His ita iam generalius absolutis,
specialiora tentabimus, atque ut & hic a fa-
cilioribus progredi liceat ad ea, quae magis
sunt complexa, strata aeris ponemus esse pla-
na horizontalia atque particulas lumen inter-
cipientes perfecte esse reflectentes. Positio-
nem priorem pro angulis eleuationis maiori-
bus absque notabili errore admitti posse iam
vidimus (§. 912.) Posterior hypothesis cum
a vero recedat, postea dispiciemus, quatenus
ea admitti possit.

§. 917. Cum itaque particulae lumen in-
tercipientes ponantur esse perfecte reflecten-
tes, spectari poterunt ceu specula sphaerica
minutissima. Quo vero assumpto, ex superio-
ribus patet, *claritatem luminis dispersi, nisi denuo*
inter-

intercipiatur, in aequali a sphaerula distantia esse aequalem, atque particulas istas esse instar puncti tenui lumine radiantis, illuminationem vero esse reciproce ut quadratum distantiae (§.654.)

§. 918. Lumen vero, quod quaquaversum diffundunt est illud ipsum, quod in earum superficiem incidit, adeoque partim lumen solare directum, partim vero illud, quod a ceteris particulis atque obiectis illuminatis in eas reflectitur. Lumen directum cum sit longe densissimum primo hic solum considerabimus, atque hoc facto luminis quod per reflexionem accedit, rationem quoque habebimus.

§. 919. Cum logarithmus luminis residui sit in ratione cunctorum obstaculorum, quae lumen in via sua ostendit, (§. 876.) consequens est, si plana statuantur strata aeris *numerum obstaculorum esse in ratione secantis distantiae a vertice.* Hoc vero ipso aerem ita depressum assumere licet, ut cuncta obstacula aequae sint disseminata. Quo facto *logarithmus debilitationis luminis ubique erit in ratione viae percursae (§. 877.)*

§. 920. Quodsi ergo via percursa sit eadem, in eadem quoque ratione debilitabitur lumen, quantacunque fuerit incidentis intensitas. Sit ergo altitudo atmosphaerae depressae $AC = 1$, particula quaedam M , cuius claritas, in A spectanda, cum a radiis solaribus per FM in eam incidentibus illuminatur. Patet vero iam vel per se, *radiorum solarium intensitatem debilitari dum rectam FM percurrunt,*
fani-

Fig. 84

similique modo ipsum lumen a particula M in A reflexum iterum debilitari, dum rectam MA percurrit.

§. 921. Ponamus v. gr. lumen solare per FM debilitari ut $1 : n$ erit eius intensitas in M $= n$, atque in eadem ratione decrescit illuminatio particulae M atque lumen ab ea in A reflexum. Sit ergo lumen particulae M $= nm$, atque hoc dum rectam MA percurrit debilitetur ut $1 : p$, erit eius claritas in A spectabilis $= nmp$.

§. 922. At eadem fuisset haec claritas, si particula posita fuisset in F, atque eius lumen *m* permeasset viam FMA, quae est summa utriusque viae. Notandum vero sermonem hic esse de claritate visa, quippe quae a distantia nil mutatur. (§. 794.)

THEOREMA L.

§. 923. *Eadem est claritas visa particulae M a radiis solis secundum FM incidentibus, collustrata quae foret, si particula esset in F posita, eiusque lumen per summam viae FMA in A incideret.*

DEMONSTRATIO.

Etenim in F a sole ita collustratur ut eius claritas sit $= m$, at vero percurrento viam FM lumen eius debilitatur, ut sit $= mn$, hocque percursa via AM tandem euadit $= nmp$. Quae claritas cum sit eadem ac in casu praecedenti, constat propositum.

§. 924. Consequens hinc est, pro quavis particula M assumi posse lumen *m*, quod percurrat summam viae MF + FA, atque prodire claritatem eam, qua reuera in M spectabilis est.

§. 925.

§. 925. His ita praestructis inuestigabimus claritatem omnium particularum in recta AB sitarum. Sit ergo lumen m, de quo antea, $=1$, altitudo aeris depressi $AC=1$.

$$\text{abscissa } CP = x$$

$$\text{ang. } CAB = \gamma$$

$$\text{ang. } FDE = \omega$$

Porro vocetur lumen particulae in A $=v$, & subtangens logisticae $=7$, atque erit (§.919.)

$$-\log v = (FM + MA):7$$

$$FM = x \sec \omega$$

$$MA = (1-x) \sec \gamma$$

adeoque

$$-\log v = (x \sec \omega + (1-x) \sec \gamma):7$$

sive posito $\log e = 1$, erit

$$v = e^{(x(\sec \gamma - \sec \omega) - \sec \gamma):7}$$

§. 926. Sit iam numerus particularum in recta verticali $AC=1:7$, erit numerus earum, quae sunt in $Mm = dx \sec \gamma:7$. Ponatur porro harum claritas in A $=d\lambda$, erit

$$d\lambda = e^{(x \sec \gamma - x \sec \omega - \sec \gamma):7} dx \sec \gamma:7$$

adeoque integratione facta debitaque adiecta constante, erit

$$\frac{\sec \gamma - \sec \omega}{\sec \gamma} \lambda = e^{(x \sec \gamma - x \sec \omega - \sec \gamma):7} - \sec \gamma:7$$

Quod est lumen omnium particularum in recta BM sitarum. Constans enim ita adiecta est ut x & λ simul euanescerent.

§. 927. Fiat iam $x = 1$, habebitur lumen aeris per totam rectam AB visum

$$L =$$

$$L = \frac{e^{--\sec\omega:1} - e^{--\sec\gamma:1}}{(\sec\gamma - \sec\omega): \sec\gamma}$$

siue si numerus logarithmi designetur per vl ,
erit

$$L = \frac{vl(--\sec\omega:7) - vl(--\sec\gamma:7)}{(\sec\gamma - \sec\omega): \sec\gamma}$$

§. 928. Quodsi fuerit $\gamma = \omega$, haec formula irrita euadit. Quare recurrendo ad differentialia, pro hoc casu habebitur

$$L = \frac{e^{--\sec\gamma:1}}{e^{\sec\gamma:7}}$$

siue

$$L = vl(--\sec\gamma:7) \cdot \sec\gamma:7$$

Fig. 85. §. 929. Sit AC altitudo aeris depressi $= r$, AB superficies telluris, CD logistica, cuius subtangens $= 7$. Sit porro $AP = \sec\omega$, $AQ = \sec\gamma$, erunt PM, QN numeri his logarithmis respondentes. Ducantur NR, MS asymptoto AB parallelae; atque per puncta N, M agatur recta NMT, eritque

$$\begin{aligned} PM &= e^{--\sec\omega:1} \\ QN &= e^{--\sec\gamma:1} \\ PQ &= \sec\gamma - \sec\omega \\ MK &= PM - QN \end{aligned}$$

adeoque

$$L = \frac{MK \cdot AQ}{PQ} = RT$$

ut adeo constructione maxime concinna habeatur claritas luminis datae eleuationi solis dataeque altitudini puncti caeli respondens.

§. 930.

§. 930. Cum ergo pars abscissa RT sit claritas aeris erit haec maxima, ubi fuerit $\gamma = 90^\circ$, & $\gamma = \omega$. Quod ut pateat, fiat brevitatis ergo

$$\sec \omega : 7 = a = \text{const.}$$

$$\sec \gamma : 7 = z$$

erit

$$L = \frac{z \left(\frac{-a}{e} - \frac{-z}{e} \right)}{z - a}$$

quare differentiando, atque faciendo $dL = 0$, habetur

$$a : z = (z - a) e^{-z} : \left(e^{-a} - e^{-z} \right)$$

Quod obtinebit si fuerit $z = a$, siue $\gamma = \omega$, eritque tunc (§. 928.)

$$L = e^{-\sec \gamma : 7}$$

Porro obtinebit, si fuerit $\gamma = 90^\circ$, siue $z = \infty$, Quo casu simpliciter est

$$L = e^{-\sec \omega : 7}$$

Ut adeo claritas aeris maximarum altera sit in horizonte, altera in ipsa altitudine solis.

§. 931. Utraque haec claritas ab altitudine solis pendet, atque proinde hoc respectu variabilis est. Prior, siue horizontalis omnium maxima erit, ubi fuerit $\omega = 0$, eritque hoc ca-

su $L = e^{-1 : 7}$. Posterior, siue quae obtinet in ipsa altitudine solis iterum maxima erit, ubi fuerit $\sec \gamma = \sec = 7$. eritque tunc

$$L = e^{-1}$$

Uni-

Unitas vero, ad quam singulae istae claritates sunt referendae, est claritas particulae extra atmospheraam a sole collustratae atque extra eam visae (§. 924.)

§. 932. Videamus iam, qualis sit atmosphaerae claritas, cum in B spectatur. Erit vero retentis iisdem literis, praeter quam **Fig. 84.** quod v iam denotet claritatem particulae M in B visae,

$$-\log v = (FM + FB):7$$

$$FM = x \sec \omega$$

$$BM = z \cdot \sec \gamma$$

unde

$$-\log v = x(\sec \omega + \sec \gamma):7$$

adeoque

$$-x(\sec \omega + \sec \gamma):7$$

$$v = e$$

Porro

$$d\lambda = v dx \sec \gamma:7$$

Hinc tandem

$$\frac{-(\sec \gamma + \sec \omega) \cdot \lambda}{7} = e^{-x(\sec \gamma + \sec \omega):7} \cdot \sec \gamma:7 - \sec \gamma:7$$

§. 933. Fiat iam $x = 1$, atque erit

$$-(\sec \gamma + \sec \omega):7$$

$$L = \frac{1 - e}{(\sec \gamma + \sec \omega):7 \sec \gamma}$$

Quae est claritas totius rectae AB in B visae.

§. 934. Ducta CG ipsi AQ parallela, positaque

Fig. 85. $AP = \sec \gamma = CH$
 $PQ = \sec \omega$

pro-

producantur ordinatae QN, PM ut sint QG, PH, atque ducta NC erit

$$L = KH.$$

Est enim

$$AQ = \sec \gamma + \sec \omega = CG$$

$$-(\sec \gamma + \sec \omega):1$$

$$NQ = e$$

$$GN = 1 - NQ$$

adeoque substitutione facta

$$L = \frac{NG \cdot CH}{CG} = HK$$

§. 935. Longe itaque aliter hoc casu definitur claritas aeris ac in casu praecedente.

Si fuerit $\gamma = \omega$, erit

$$L = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2 \sec \gamma} \right)$$

Quodsi insuper ponatur $\gamma = \omega = 0$, erit

$$L = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2} \right)$$

§. 936. Haftenus rectas AB, FD spectavi Fig. 84 mus, quasi essent in eodem plano verticali.

At hoc nequaquam necessarium est, cum manente particula M, maneat quoque longitudo utriusque viae FM, MA vel FM, MB.

Quare generaliter denotabit angulus CAM $= \nu$ distantiam rectae AB vel punctorum in

hac sitorum a vertice, angulus FDE $= \omega$ generaliter erit distantia solis a vertice, ut

adeo perinde sit, siue rectae AB, FD sint in eadem plaga, siue sint in diuersis, simulac

utraque hypothesis, cui calculum istum superstruximus, a vero non ita multum aberret

(§. 916.)

§. 937. Porro claritas visa L est claritas linearis, quae quidem cum visa coincidit. At cum illuminatio inde nascens pendeat a distantia, atque sit reciproce ut eius quadratum, curatius inquirendum erit, an quaedam hinc enascatur diuersitas.

§. 938. Quodsi aerem ceu medium diaphanum intueamur, particulae istae, e quibus lumen in idem spatium retinae circulari incidit, sitae sunt in cono, cuius apex est ipsa oculi pupilla, basis vero in extremitate aeris. Ubicunque iam conus ista ita secetur, ut segmentum sit ad axin normale, atque basis coni ponatur velut infinite parua, claritas particularum in segmento isto sitarum erit ea, quam supra definiuimus. Cumque earum numerus crescat directe ut quadratum distantiae, illuminatio vero cuique particulae debita sit reciproce ut idem quadratum, utraque haec ratio sese destruit, quare illuminatio erit simpliciter ut claritas linearis L , atque crescet, ut quadratum sinus semidiametri adparentis. Quod ut euidentius fiat, atque insuper pateat depressionem aeris illuminationi non officere, rem ita enucleabimus.

Fig. 86. §. 939. Sit AC altitudo atmosphaere naturalis, AP altitudo quaecunque, ordinatae PN curuae CNG denotent densitatem particularum lumen intercipientium, atque primo quaeramus claritatem particulae M in A visae, & a radiis solaribus secundum directionem FM collustratae. Utraque vero & hic assumitur hypothesis, qua antea usi sumus (§. 916.)

§. 940.

§. 940. Fiat iam ut supra

$$\begin{array}{ll} \text{AC} \quad \text{AP} = 1 & \text{ang. CAM} = \gamma \\ \quad \text{CP} = x & \text{ang. FDE} = \omega \\ \quad \text{PN} = y & \text{subt. logisticae} = 7 \end{array}$$

itidem erit (§. 919.

$$- \log v = (\text{CNP. sec } \omega + \text{GNPA. sec } \gamma):7$$

Est enim spatium CNP summa obstaculorum in CP & spatium GNPA est eadem summa in PA. Unde erunt cuncta obstacula in FM = CNP. sec ω , in MA = GNPA. sec γ .

§. 941. Cum ergo sit

$$v = e - (\text{CNP. sec } \omega + \text{GNPA. sec } \gamma):7$$

erit eo casu quo $\omega = \gamma$, totum spatium GCA = A, &

$$v = e - A. \sec \gamma:7$$

Sed est CNP = $\int y dx$

$$\text{GNPA} = A - \int y dx$$

quare

$$v = e - (\int y dx (\sec \omega - \sec \gamma) + A \sec \gamma):7$$

Hinc iterum haberetur lumen lineare L plane idem, quod supra inuenimus. (§. 927.) At quaeritur lumen, quod debetur cono, cuius vertex est in A, axis AC

§. 942. Sit latus conii istius Ab axi AB infinite vicinum, erit angulus BAb = $d\gamma$, Porro est

$$\text{AP} = (1 - x)$$

$$\text{PM} = (1 - x) \tan \gamma$$

$$\text{MQ} = (1 - x). d \tan \gamma$$

$$\text{spatiolum MQqm} = (1 - x) dx. d \tan \gamma$$

$$\text{quantitas particularum} = (1 - x) dx. d \tan \gamma. \gamma$$

§. 943. Quodsi iam triangulum PAM circa axin AB gyretur, spatiolum MQqm describet annulum solidum, cuius

$$\text{radius} = PM = (1-x) \cdot \text{tang } \gamma$$

$$\text{area} = \pi (1-x)^2 \cdot dx \cdot (\text{tang } \gamma)^2$$

$$\text{numerus particularum} = \pi \cdot (1-x)^2 \cdot d(\text{tang } \gamma)^2 y dx$$

Unde cum illuminatio cuius particulae debita sit $= v:AM^2 = v:(1-x)^2 \cdot \sec^2 \gamma$, dicta illuminatione $= \eta$, erit

$$d\eta = \frac{\pi \cdot d(\text{tang } \gamma)^2 \cdot e}{\sec^2 \gamma}$$

Cuius integrale addita debita constante

$$d\eta = \frac{\pi \cdot d(\text{tang } \gamma)^2 \cdot e}{\sec^2 \gamma} \cdot \frac{1 - e}{\sec \omega - \sec \gamma}$$

Ut iam habeatur tota illuminatio, faciendum $\int y dx = A$, eritque

$$\eta = \frac{\pi \cdot d(\text{tang } \gamma)^2}{\sec^2 \gamma} \left(\frac{e}{\sec \omega - \sec \gamma} \right)$$

§. 944. Ut iam haec formula ad claritatem visam reducatur, illuminatio $d\eta$ per annuli magnitudinem adparentem est diuidenda. Est vero eius latitudo adparens $= d\gamma$, semidiameter adparens $= \sin \gamma$, adeoque area $= 2\pi \cdot \sin \gamma \cdot d\gamma$. Unde erit claritas visa

$$L = \frac{e}{\sec \omega - \sec \gamma} \cdot \sec \gamma$$

Quae

Quae aequatio cum ea, quam supra dedimus, prorsus coincidit (§. 927.) si fiat $A=1$.

§. 945. Assumta subtangente $7=2,171473$ sequentem concinnaui tabellam pro claritate rectarum AB in A visa.

ang. γ , & ω	abscissae AQ & AP	ordinatae NQ & MP	claritas in altitu- dine solis	claritas in ver- tice
0	1,0000	0,6310	0,2906	0,2906
10	1,0154	0,6265	0,2923	0,2897
20	1,0642	0,6126	0,3002	0,2864
30	1,1547	0,5876	0,3123	0,2805
40	1,3054	0,5482	0,3248	0,2710
50	1,5557	0,4885	0,3500	0,2562
60	2,0000	0,3972	0,3666	0,2338
70	2,9238	0,2602	0,3503	0,1927
80	5,5588	0,0705	0,1870	0,1178

Fig. 85.

§. 946. Ope huius tabellae atque formu-
lae (§. 927.)

$$L = \frac{AQ(MP - NQ)}{AQ - AP}$$

iam habebitur claritas aeris pro quibuscumque angulis γ , ω . Porro columna tertia ostendit claritatem, quae in horizonte est (§. 930.) quamque maximam esse supra vidimus. Columna tertia alteram claritatem maximam exhibet, quam in ipsa altitudine solis obtinere inuenimus, quaeque fere semper claritate horizontali est inferior. Quintam columnam, quae claritatem in vertice exhibet, addidimus, ut cum utraque maxima comparari posset.

§. 947. Cum in altitudine solis claritas maxima sit, ubi fuerit $AQ = 7$ (§. 931.) atque pro nostra tabella sit $7 = 2,171473$, erit $7 = \sec. 62^{\circ}, 35'$, adeoque altitudo solis respondens

$= 27^{\circ}, 25'$, & claritas ipsi debita $= e = 0,3679$
 $=$ claritati quae tunc est in horizonte $=$ debilitationi luminis, cum subtangentem 7 in aere depresso percurrit. Unitas vero, ad quam cuncti isti numeri sunt referendi, iam supra explicata est (§. 931.)

§. 948. Tabella haec & formulae hactenus erutae locum haberent, atque pro angulis γ, ω minoribus a vero haud ita multum aberrarent, si particulae lumen intercipientes perfecte essent reflectentes, nullaque accederet luminis inflexio, atque particula quaelibet ea tantum claritate esset visibilis, quae lumini solis directe incidenti debetur. At vero inaequalis luminis reflexio eiusque inflexio id efficit, ut loca aeris imagini solis viciniora clariora videantur. Cum vero particulas istas sphaericas statuere liceat, ponamus imaginem solis esse in recta AB, quae spectetur ceu axis conici triangulo BAb descripti, radii solares cum paralleli sint, eadem ratione in singulas particulas, quae in superficie istius conici sunt, incidunt, eademque ergo ratione in A reflectuntur. Quodsi ergo in hac superficie ducantur rectae quaecunque Ab e vertice A, claritas harum rectarum inuicem comparari poterit ea, quae lumini solis directe in eas incidenti debetur, atque eatenus formulae supra erutae usui erunt. Quodsi porro angulus

lus BAb fuerit recto longe maior, non modo inflexionis effectus plane aberit, verum & ipsa quantitas luminis a particulis reflexa magis ad aequalitatem accedit, unde & his casibus non modo rectae Ab, quae ad eundem conum referuntur verum & eae, quae sunt ab axe AB remotiores vel ipsi propiores, earumque claritates lumini directo debitae conferri inter se poterunt.

§. 949. Triplicem esse causam, quae lumen particularum auget, iam supra notauimus, atque facile ostendi poterit, *particulas, quae in eodem strato sunt, aequae esse luminosas, quantumuis differat earum lumen, si fuerint in stratis diuersis.* Etenim lumen solare, quod directe incidit in stratum PMqp viam percurrit eandem FM, adeoque eodem modo debilitatur, unde eadem inde enascetur particulae cuiuslibet claritas. Simili modo lumen, quod superficies telluris in quaslibet particulas huius strati reflectit, non potest non ipsis aequale superaddere claritatis augmentum, cum quaelibet particula eodem modo ipsi sit obuersa. Similique tandem ratione idem erit claritatis augmentum, quod cuilibet particulae eiusdem strati PM ab iis particulis adcrescit, quae in quolibet alio strato sitae sunt.

§. 950. Sit ergo AD superficies telluris, Fig. 87. AC altitudo aeris depressi, CB eius superficies, PMmp stratum quodlibet, ordinatae PQ curvae EF referant claritatem particularum istius strati.

Fiat iam

$$AC = 1$$

$$AP = \xi$$

$$PQ = y$$

$$\text{ang. CAB} = \gamma$$

atque quaerenda sit claritas rectae AB in A
visa.

§. 951. Erit ergo

$$Mm = d\xi \cdot \sec \gamma$$

numerus particularum in spatiolo Mm (§. 926.)

Porro earum lumen

$$= y d\xi \cdot \sec \gamma$$

Quod dum viam AM percurrit, ita debilitatur
ut sit

$$- \xi \sec \gamma$$

$$dz = e \cdot y dx \cdot \sec \gamma$$

Quodsi ergo detur y per ξ , dabitur quoque z
siue claritas rectae AM, adeoque & claritas
totius rectae AB.

§. 952. Resoluatur haec formula in seriem,
atque erit

$$dz = \frac{y d\xi \cdot \sec \gamma}{\gamma} \left(1 - \frac{\xi \cdot \sec \gamma}{\gamma} + \frac{\xi^2 \cdot \sec^2 \gamma}{2 \cdot \gamma^2} - \frac{\xi^3 \cdot \sec^3 \gamma}{2 \cdot 3 \cdot \gamma^3} + \&c. \right)$$

adeoque

$$z = \frac{\sec \gamma}{\gamma} \int y d\xi - \frac{\sec^2 \gamma}{\gamma^2} \int y \xi d\xi + \frac{\sec^3 \gamma}{2 \gamma^3} \int y \xi^2 d\xi - \&c.$$

Integralia huius seriei angulus γ non ingredi-
tur, quare spectari poterunt ceu coefficients,
atque erit claritas totius rectae AB

$$Z = \frac{A \sec \gamma}{\gamma} - \frac{B \sec^2 \gamma}{\gamma^2} + \frac{C \sec^3 \gamma}{2 \gamma^3} - \frac{D \sec^4 \gamma}{2 \cdot 3 \cdot \gamma^4} + \&c.$$

§. 953.

qua lumen in mediis diaphanis, potissimum §c. 425

§. 953. Facile vero ostendi potest, claritates EC, QP, AF a ratione aequalitatis parum differre. Quodsi enim eae tantum essent, quae debentur lumini directo, foret EQF logarithistica, cuius subtangens = 7, atque per ea, quae supra inuenimus (§. 886.) foret

$$CE:AF = 5:3$$

At cum quaelibet particula insuper a superficie telluris illuminetur, inferioribus maius accedit claritatis augmentum, quam superioribus, unde hoc respectu erit $CE:AF < 5:3$. Cumque porro aliud superaddatur augmentum claritatis, dum quaelibet particula a ceteris omnibus collustratur, inaequalitas inter claritates PQ fere euanescit.

§. 954. Ponamus ergo y const. erit

$$dz = y \cdot e^{-\xi \sec \gamma} \cdot dx \cdot \sec \gamma$$

quare integrando habebitur

$$z = \text{Const.} - y e^{-\xi \sec \gamma}$$

Constans ita est addenda ut z & ξ simul euanescant, quare erit $z = y$, unde ergo

$$z = y (1 - e^{-\xi \sec \gamma})$$

adeoque ponendo $\xi = 1$, habebitur claritas totius rectae

$$Z = y (1 - e^{-\sec \gamma})$$

Patetque hinc esse y claritatem horizontalem.

Fig. 85. §. 955. Quodsi ergo AC denotet claritatem horizontalem y , atque fiat $AP = \sec \gamma$, erit

$$PM = y \cdot e^{-\sec \gamma : 1}$$

$$HM = y \left(1 - e^{-\sec \gamma : 1} \right) = Z$$

ut adeo hoc modo facile habeatur claritas datae distantiae a vertice respondens, atque per claritatem horizontalem definita.

§. 956. Claritas superficiei telluris & aeris pendet ab altitudine solis. Illa quidem ita, ut dicta distantia solis a vertice ω , decreascet in ratione

$$1 : \cos \omega \cdot e^{-\sec \omega : 1}$$

Contra ea claritas aeris pendet a claritate particularum in singulis stratis, quae ergo aliquanto minor erit, ubi imminuta fuerit distantia solis a vertice. Porro & ipsae particulae inferiores minus a sole collustrantur, cum depressior est huius altitudo. Neque tamen id fit ideo, quod iam in idem stratum pauciores radii incidant. Compensatur enim hoc decrementum ab aucto numero particularum, quae lumen in via sua offendit, quippe quae semper est in ratione reciproca sinus altitudinis. Verum ideo minuitur ista claritas, quia lumen, ob maiorem viam quam iam percurrit, notabilius debilitetur, adeoque debilius sit illud, quod in particulas telluris superficiei viciniore incidit. Quodsi ergo maior sit distantia solis a vertice, adplicatae curvae EQ tellurem versus notabilius decrescunt. Quare
his

his casibus eas aequales statuere haud licet, etsi tolerabilis sit haec positio, ubi distantia γ quinquaginta aut sexaginta gradus non excedit. Facile enim patet, decrementum istud illuminationis directae magna ex parte iterum compensari, quia lumen dispersum claritatem cunctarum particularum iterum auget.

§. 957. Quatenus ergo assumere licet esse

$$Z = \gamma \left(1 - e^{-\sec \gamma} \right)$$

tabula supra data (§. 886.) facile abibit in sequentem

γ	Z	γ	Z
0	0.4111	50	0.5613
10	0.4159	60	0.6533
20	0.4308	70	0.7874
30	0.4575	80	0.9524
40	0.4991	90	1.0000

In hac tabella claritas horizontalis est $= 1$, angulus γ denotat distantiam a vertice, atque Z est claritas aeris ipsi respondens.

§. 958. Sit iam AB superficies telluris, AC altitudo aeris depressi, CD eius superficies, in M sit particula, atque quaeritur summa luminis, quod a superficie telluris in eam incidit. Ductis rectis infinite vicinis MP, Mp, fiat

$$AC = 1$$

$$AM = x$$

$$\text{ang. AMP} = \phi$$

atque erit

$$AP = x \cdot \text{tang } \phi$$

$$Pp = x \cdot d \text{ tang } \phi$$

Trian-

Triangulum PMA circa axin AM rotetur, atque spatiolum Pp describet spatium annulare, cuius area

$$= 2\pi x^2 \cdot \text{tang } \phi \cdot d \text{ tang } \phi.$$

At lumen ex hoc annulo in M incidens est in ratione spatii, & sinus anguli emanationis, porro cum percurrere debeat viam — PM, debilitabitur ob diuergentiam & dispersionem radiorum, ut tandem sit

$$-v \cdot \sec \phi : 1$$

$$d\eta = 2\pi \cdot x^2 \cdot \text{tang } \phi \cdot d \text{ tang } \phi \cdot \cos \phi \cdot e$$

$$x^2 \cdot \sec \phi^2$$

Quae aequatio si debite contrahatur abit in sequentem

$$-x \cdot \sec \phi : 1$$

$$d\eta = \frac{2\pi \cdot d \sec \phi}{\sec \phi^2} \cdot e$$

Quae si in seriem resoluatur, absoluta integration hanc induit formam

$$\frac{\eta}{2\pi} = \text{const.} - \frac{1}{\sec \phi} - \frac{x}{7} \log \sec \phi + \frac{xx}{2 \cdot 7} \sec \phi - \frac{x}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3} \sec \phi + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^4} \sec \phi^3 - \&c.$$

Constans ita est addenda, ut η & ϕ simul euanescant; quare erit

$$\text{Const.} = 1 - \frac{xx}{2 \cdot 7} + \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^4} + \&c.$$

§. 959. Fiat iam $\phi = 90^\circ$, ut habeatur lumen a tota superficie telluris in particulam M reflexum, eritque

$$\eta = 2\pi \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^4} + \&c. \right)$$

Quod

Quod lumen ut cum lumine solari comparari possit, ponatur claritas solis = 1, claritas superficiei telluris = t ; cum utrumque incidat in particulam sphaericam M , anguli incidentiae sunt iidem. Quare illuminatio particulae M quatenus a sole collustratur est ad eam, quae a superficie telluris ipsi adcrescit ut factum ex 1 in aream disci solaris adparentis ad factum ex t in aream hemisphaerii. Hic enim obtinet positio illa, quam supra (§. 101.) minus recte ad definiendam claritatem lunae adplicatam fuisse diximus a cel. SMITHIO.

§. 960. Sit ergo semidiameter solis adparentis = s , ratio ista composita erit

$$= 2\pi(1 - \cos s) : 2\pi t = (1 - \cos s) : t$$

§. 961. Incidant iam radii solares secundum rectam FM , sitque angulus $FMC = \omega$, erit via $FM = (1 - x) \sec \omega$ adeoque lumen solare debilitatur in ratione

$$= (1 - x) \sec \omega : 1$$

$$= 1 : e$$

Sit ergo claritas particulae M hinc nascens = v , erit

$$= (1 - x) \sec \omega : 1$$

$$v = e$$

$$2\pi(1 - \cos s)$$

&

$$\eta = 2\pi t \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^4} - \&c. \right)$$

adeoque

$$v : \eta = \frac{(1 - x) \sec \omega : 1}{(1 - \cos s) : t} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3} - \&c. \right)$$

§. 962.

§. 962. Claritas superficiei telluris pendet a quintuplici causa. Primaria est sol, cuius radii in eam incidunt, atque hoc respectu erit $t \propto \pi \cdot \sin s^2$. Hoc vero lumen dum aerem peragratur, ita minuitur ut iam sit

$$- \sec \omega : 1$$

$$t \propto \pi \cdot \sin s^2 \cdot e$$

Porro minuitur ob obliquitatem incidentiae, quare iam erit

$$- \sec \omega : 1$$

$$t \propto \pi \cdot \sin s^2 \cdot e \cdot \cos \omega$$

§. 963. Huic lumini accedit illud, quo ipsa athmosphaera tellurem collustrat. Dicta ergo claritate solis extra athmosphaeram visa $= 1$, claritate athmosphaerae media $= \lambda$, erit lumen hinc nascens, ob illuminationem absolutam

$$= \pi \cdot \lambda$$

Quare iam erit

$$t \propto \pi \left(\lambda + \sin s^2 \cdot e \cdot \cos \omega \right) - \sec \omega : 1$$

§. 964. Hoc lumen porro minuitur, cum pars eius a corporibus terrenis absorbeatur. Dicta ergo horum albedine $= A$, erit (§. 727.)

$$- \sec \omega : 1$$

$$t = \pi \cdot A \left(\sin s^2 \cdot e \cdot \cos \omega + \lambda \right)$$

Quae adeo est claritas superficiei telluris, cum claritate solis & athmosphaerae comparabilis, siue ad eandem unitatem reuocata. Est vero πA illuminatio absoluta, quare hic fiet simpliciter $= A$, unde substitutione facta prodit

$$- (1-x) \sec \omega : 1$$

$$\frac{v}{\eta} = \frac{(-\cos s) \cdot e}{- \sec \omega : 1}$$

$$A(\sin s^2 \cdot \cos \omega \cdot e + \lambda) \cdot (1 - 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 2 \cdot 37^3 - \&c.)$$

siue

qua lumen in mediis diaphanis, potissimum &c. 431

sive reductione facta

$$\frac{v}{\eta} = \frac{e \cdot \sec \omega}{A(\cos \omega \cdot (1 + \cos s) + \frac{\lambda \cdot e}{1 - \cos s}) \cdot (1 - \frac{x^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{xxx}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3} - \&c.)}$$

§. 965. Est vero ob semidiametrum s vehementer parvam $1 + \cos s = 2$, $1 - \cos s = 2 \sin \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2} \sin^2 s$, unde

$$\frac{v}{\eta} = \frac{e \cdot \sec \omega}{2A(\cos \omega + \lambda e \cdot \operatorname{cosec} s^2) \cdot (1 - \frac{x^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7^3} - \&c.)}$$

§. 966. Haec ratio potissimum hieme, cum alta nix totam superficiem telluris obtegit, a ratione aequalitatis parum differt, ut adeo lumen, quod telluris superficies in particulas aeris reflectit his casibus omitti nequeat.

§. 967. Sit v. gr. quodam casu
 altitudo particulae $x = \frac{1}{2}$
 distantia solis a vertice $\omega = 60^\circ$.
 subtangens logisticae $7 = 2$
 claritas athmosphaerae $\lambda = \frac{1}{271000}$ (§. 914.)
 semidiameter solis $s = 0^\circ, 16'$

$$\sec \omega = 2 \quad \& \quad \cos \omega = \frac{1}{2} \quad \text{erit}$$

$$\frac{e}{\sec \omega} = 1,649$$

$$e = 2,7183$$

$$\operatorname{cosec} s^2 = 46164$$

adeoque inita computatione

$$v:\eta = 0,913:A$$

§. 968.

§. 968. Quodsi ergo albedinem niuis ponamus $=\frac{2}{5}$, erit

$$v:n=2,282:1$$

Hoc ergo casu particula M in altitudine media aeris depressi posita ita a superficie telluris & a radiis solaribus collustratur, ut claritas hinc nascens posteriori casu ea quam a lumine telluris acquirit tantummodo duplo maior sit.

§. 969. Superficiem telluris in hoc computo planam assumimus, quod si non fuerit, plus uno respectu turbatur calculus, at hisce diutius immorari operae pretium non est. Videamus ergo, qua ratione cuilibet particulae claritatis augmentum a ceteris accedat. Sit stratum quodlibet QSsq, fiat

$$\begin{aligned} MQ &= x \\ \text{ang. RMQ} &= \phi \end{aligned}$$

codem modo quo supra (§. 958.) erit area annuli plani, cuius latitudo SR, semidiameter RQ

$$= 2\pi \cdot \text{tang} \phi \cdot d \text{ tang} \phi \cdot x^2$$

At cum annulus sit solidus, eiusque crassities $= Qq = dx$, erit iam eius area

$$= 2\pi \cdot x dx \cdot \text{tang} \phi \cdot d \text{ tang} \phi.$$

Sit iam ut supra (§. 926.) numerus particularum in spatio $1 = 1:7$, claritas unius particulae $= y$, erit summa claritatum pro annulo

$$= \frac{2\pi x dx}{7} y \cdot \text{tang} \phi \cdot d \text{ tang} \phi.$$

At hoc casu angulus emanationis & incidentiae hic est idem, quare lumen simpliciter debilitatur ob radiorum diuergentiam & dispersionem, quare cum longitudo viae siue distan-

tia

tia MR sit $= x \sec \phi$. erit tandem lumen in M incidens

$$dd\lambda = 2\pi \cdot yxxdx \cdot \text{tang} \phi \cdot d\text{tang} \phi \cdot e \quad \frac{-x \sec \phi}{7xx \cdot \sec \phi^2}$$

Quae aequatio facile abit in sequentem

$$dd\lambda = 2\pi \cdot y \cdot dx \cdot d\sec \phi \cdot e \quad \frac{-x \sec \phi}{7 \cdot \sec \phi}$$

Qua in seriem resoluta, facta integratione, additaque debita constante, prodit

$$d\lambda = \frac{2y\pi dx}{7} \left(\log \sec \phi - \frac{x \sec \phi}{7} + \frac{x^2 \sec \phi^2}{2 \cdot 2 \cdot 7^2} - \frac{x^3 \cdot \sec \phi^3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7^3} + \&c. \right) \\ + \frac{2y\pi dx}{7} \left(\frac{x}{7} - \frac{x^2}{2 \cdot 2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7^3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7^4} + \&c. \right)$$

§. 970. Ut iam habeatur lumen e toto strato QS in M incidens, faciendum $\phi = 90^\circ$, eritque

$$d\lambda = \frac{2y\pi dx}{7} \left[\frac{x}{7} - \frac{x^2}{2 \cdot 2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7^3} - \&c. \right]$$

§. 971. Quodsi ergo iam detur y per x, secunda integratio absolui poterit, atque dabitur λ per x. Quodsi porro fiat $x = MA$ & $x = -CM$, habebitur lumen Λ , quod singulae particulae omnium stratorum in particulam M reflectunt, quod si addatur utrique lumini v & η , quod debetur radiis solaribus & superficiei telluris (§. 961. seqq.) habebitur ipsa claritas particulae M. Quare hoc modo dabitur aequatio

E e inter

inter y & AM . Quae vero nisi pro hac aequatione assumatur series, erui vix poterit. Assumpta vero serie calculus adeo erit prolixus, ut quomodo ad finem perducere possit ego quidem non videam, unde prolixitatem tantum ostendam.

§. 972. Fiat itaque $QK=y$, atque ponatur
 $y=\alpha+\epsilon.AQ^2+\gamma.AQ^3+\delta.AQ^4+\&c.$

Porro ponatur $AM=z$, erit $AQ=z-x$ adeoque

$$y=\alpha+\epsilon(z-x)+\gamma(z-x)^2+\delta(z-x)^3+\&c.$$

&

$$MN=\alpha+\epsilon z+\gamma z^2+\delta z^3+\&c.$$

At facile iam patet priorem seriem ita esse immutandam, ut eliminetur x , atque sola z remanente series ista cum altera MN comparari poterit, quo definiantur coefficientes α, ϵ, γ &c.

§. 973. Substituatur ergo series y in aequatione $d\lambda$ (§. 970.) atque prodibit

$$d\lambda = \frac{2\pi dx}{7} \left(\frac{\alpha x}{7} - \frac{\alpha x^2}{2.2.7^2} + \frac{\alpha x^3}{2.3.3.7^2} - \&c. \right. \\
+ \frac{\epsilon(z-x)^2 x}{7} - \frac{\epsilon(z-x)x^2}{2.2.7^2} + \&c. \\
+ \frac{\gamma(z-x)^2 x}{7} - \frac{\gamma(z-x)^2 x^2}{2.2.7^2} + \&c. \\
\left. + \&c. \right]$$

Hinc ergo integratione facta incidemus in seriem serierum, quam quidem hic transcribere superfluum est. Ea vero absoluta faciendum $x=z$ & $x=1-z$, atque habebitur series, in qua sola remanebit z , quae ergo dabit claritatem

tem Λ , quae particulae M a cunctis ceteris adcrefcit. Huic addendum lumen fclare, quod erit (§. 961.)

$$-(1-z)\sec\omega:1$$

$$=m.e$$

fmiliterque lumen a tellure incidens, quod erit (§. cit.)

$$=nt(1 - \frac{z}{2 \cdot 2^2} + \frac{z^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3} - \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^4} + \&c.)$$

atque emerget feries, quae fi fecundum dignitates ipfius z difponatur, coefficientes cum coefficientibus α, β, γ &c. comparari poterunt.

§. 974. Sit iam AB fuperficies telluris, ED fuperficies aeris deprefsi, utraque vero velut infinite extenfa. Radii fclares incidant fecundum directionem CA, DB , fitque eorum quantitas extra aerem $=1$, dum in fuperficiem AB incidunt $=n$, erit quantitas eorum, qui in aere difperguntur $=1-n$. Ponamus, ut fupra (§. 905.) dimidiam horum partem deorfum cadere in AB , erit fuma radiorum duplici hoc refpectu in AB incidentium

$$=n + (1-n):2 = \frac{1}{2}(1+n)$$

§. 975. Quodfi iam albedo fuperficie i telluris fit $=A$ (§. 727.) erit $\frac{1}{2}A(1+n)$ quantitas radiorum reflexorum. Horum pars quaedam extra aerem recta emergit, nunquam in eum regreffura, qua dicta $=m$, erit quantitas radiorum eorum, qui in aere difperguntur $=\frac{1}{2}A(1+n).(1-m)$. Horum pars dimidia iterum in telluris fuperficiem incidit, quae ergo eft $=\frac{1}{4}A(1+n).(1-m)$

§. 976. Huius quantitatis iterum a tellure reflectitur pars $\frac{1}{4}AA(1+n).(1-m)$, aerem recta egreditur pars $=\frac{1}{4}AA(1+n).(1-m)m$, in aere dispergitur pars $=\frac{1}{4}AA(1+n).(1-m)^2$, in tellurem recidit pars $=\frac{1}{8}AA(1+n).(1-m)^2$.

§. 977. Simili modo si sequentes computentur luminis residui reflexiones & dispersiones, erit tandem summa totius luminis, quo superficies telluris collustratur.

$$\Lambda = \frac{1}{2}(1+n) + \frac{1}{4}A(1+n).(1-m) + \frac{1}{8}A^2(1+n).(1-m)^2 + \frac{1}{16}A^3(1+n).(1-m)^3 + \&c.$$

siue hac serie in summam contracta

$$\Lambda = \frac{1+n}{2-A(1-m)}$$

§. 978. Unitas, ad quam hoc lumen est referendum, est quantitas luminis solaris in CD incidentis. Cum ergo minuatur ut sinus altitudinis solis, unitatem istam ponemus esse eam quantitatem radiorum, quae normaliter incidit in CD. Quare dicto angulo $EAC = \gamma$, erit

$$\Lambda = \frac{(1+n)\cos\gamma}{2-A(1-m)}$$

Porro est

$$n = e^{-\sec\gamma}$$

Quare substitutione facta erit

$$\Lambda = \frac{(1+e^{-\sec\gamma})\cos\gamma}{2-A(1-m)}$$

§. 979. Quantitas m est in ratione radiorum emanantium, eorumque debilitationis, dum aerem percurrunt. Dicta quantitate absolute

qua lumen in mediis diaphanis, potissimum &c. 437

solute emanantium $= \pi$, erit quantitas eorum qui emanant per conum, cuius latus est EAC $= \pi \cdot \sin \gamma^2$ (§. 125.) quae si dicatur q erit

$$dq = 2\pi \cdot \sin \gamma \cdot d\sin \gamma.$$

sive

$$dq = \frac{1}{2} \pi d\cos 2\gamma.$$

adeoque

$$dm = \frac{1}{2} d\cos 2\gamma \cdot e^{-\sec \gamma}$$

$$m = \frac{1}{2} e^{-\sec \gamma} d\cos 2\gamma.$$

§. 980. Diametro AC $= 1$ insistant semicirculus ANC, compleatur quadratum ABDC, atque subtangente $= 7$ describatur logistica DEM. Ducta iam secante qualibet CQ, ut angulus QCA sit $= \gamma$, demittatur sinus NQ, atque facta CP $=$ CQ erectaque PM, compleatur rectangulum PMRK, erit punctum R in curua ERC, hoc modo construenda. Porro spatium totum ERCAE erit $= m$, adeoque

$$ERCDB = 1 - m.$$

§. 981. Utrumque hoc spatium fere est aequale, si fuerit $\gamma = 2$

Quare faciendo $m = 1 - m = \frac{1}{2}$, erit hoc casu

$$\Lambda = \frac{(1 + e^{-\sec \gamma/2}) \cos \gamma}{2 - \frac{1}{2} A}$$

§. 982. Lumen solare directe in tellurem incidens est

$$\lambda = \cos \gamma \cdot e^{-\sec \gamma/2}$$

quo ergo a priore subtracto, remanet lumen, quod ex aere in terram recidit

$$l = \frac{\cos \gamma - (1 - \frac{1}{2} A) \cos \gamma \cdot e^{-\sec \gamma/2}}{2 - \frac{1}{2} A}$$

Ee 3

§. 983.

§. 983. Haec ergo erit claritas plani ab athmosphaera absolute illuminati, cum eiusdem claritas, dum a sole extra athmosphaeram collustratur, est $= 1$. Dicta iam claritate solis $= 1$, semidiametro disci $0^{\circ}, 16'$, erit claritas athmosphaerae media

$$\eta = l. (\sin 16')^2$$

siue

$$\eta = \frac{(\cos \gamma - (1 - \frac{1}{2}A) \cos \gamma \cdot e^{-\sec \gamma : 2}) \cdot (\sin 16')^2}{2 - \frac{1}{2}A}.$$

§. 984. Albedo superficiei telluris, nisi niue fuerit obiecta, vix est $\frac{1}{12}$. Posita ergo $A = \frac{1}{12}$, erit

$$\eta = \frac{(24 - 23 \cdot e^{-\sec \gamma : 2}) \cdot \cos \gamma \cdot (\sin 16')^2}{47}$$

Parum ergo hoc casu claritas athmosphaerae a lumine, quod telluris superficies reflectit, augetur. Notabilius erit hoc augmentum, si ponatur $A = \frac{2}{5}$, quod albedini niuis fere respondet. Erit enim iam

$$\eta = \frac{(1 - 0,8 \cdot e^{-\sec \gamma : 2}) \cos \gamma \cdot (\sin 16')^2}{1,8}$$

§. 985. Ut quantitates l hinc emergentes cum iis conferri possint, quas supra (§. 908.) in tabella exhibuimus, ponemus quantitates

$$\lambda = \cos \gamma \cdot e^{-\sec \gamma : 2} \quad \text{easdem, quas ibidem inuenimus.}$$

Unde

Unde erit

altit. ☉	λ	l	l'
90	0,5889	0,2225	0,2938
80	0,5752	0,2214	0,2915
70	0,5348	0,2182	0,2844
60	0,4698	0,2123	0,2723
50	0,3837	0,2034	0,2550
40	0,2820	0,1902	0,2317
30	0,1734	0,1708	0,2007
20	0,0727	0,1390	0,1577
10	0,0082	0,0847	0,0928

§. 986. Columna prima hic iterum exhibit gradus altitudinis solis, secunda λ claritatem plani horizontalis unice a sole collustrati, tertia l claritatem eiusdem plani unice ab atmosphaera sed absolute illuminati, eo casu quo $A = \frac{1}{12}$, quarta denique eandem claritatem l' cum est $A = \frac{2}{3}$, etsi hic casus, si altitudines solis spectes maiores, vix existat, nisi in montibus peruuanis & aethiopicis eum quaerere volueris. Unitas vero ad quam hi numeri referuntur eadem est, quae supra (§. 902. seqq.) claritas nempe eiusdem plani, cum a radiis solaribus extra atmosphaeram normaliter illuminatur. Ceterum cum numeri isti a subtangente 7 adeoque a pelluciditate atmosphaerae pendeant, me non monente patet, eos valde mutabiles esse, ut adeo haec tabella simili modo ac ceterae, quas in hac Photometriae parte dedimus, exempli ergo adiecta sit.

CAPVT III.

Traditur historia naturalis crepusculi, atque definitur, quo successu noctem detrudat dies, diemque nox.

§. 987. **E**x quo antiquissimi astronomi densissimarum tenebrarum, quae noctu caelo terraeque incumbunt, primum initium, absolutumque finem per depressionem solis infra horizontem 18 vel 19 gr. determinarunt, atque inde altitudinem aeris lumen solare reflectentis deduxerunt eam, quae obtineret, si simplex tantum adesset reflexio, atque via luminis in aere esset rectilinea, ad pauca capita reducentur, quae hac in re porro peracta sunt. Primus est, quem noui, VARENIVS, qui duplicem admisit reflexionem, atque inde altitudinem aeris, quae ex unica reflexione prodierat fere 11 mill. germ. ad quartam partem depressit. Viam luminis in aere itidem posuit rectilineam, cumque & haec altitudo ipsi videretur nimia, rem omnem posteris ventilandam reliquit: Cel. HALLEIVS curvaturae viae rationem habuit, at unicam retinuit reflexionem, unde prodiit altitudo aeris $9\frac{1}{2}$ mill. germ. Computum quoque tradunt cel. SMITHIVS & KAESTNERVS in operibus iam passim laudatis. Cel. IO. BERNOVLLIVS diem breuissimi crepusculi definiuit, idemque problema uniuersalius absoluit Cl. KAESTNERVS, quod cum simpliciter pendeat a depressione solis infra horizontem, voto magis satisfacit, quam prius, quo definienda est aeris altitudo.

§. 988.

§. 988. Haec fere sunt, quae de crepusculo haftenus in lucem prodierunt, quaeque iam nostro more proponemus, ut inde ad cetera progredi liceat his superaddenda. Est igitur problema primum: *Data elevatione poli, quaeritur, quaenam sit declinatio sideris, quod breuissimo tempore ad datam altitudinem supra horizontem siue ad datam depressionem infra eundem pertingat.*

§. 989. Sit HZON meridianus, P, Q uterque polus, ADE aequator, HDO horizon, MSRL circulus aequatori parallelus, ipsique infinite vicinus msrl. Sit porro HC=OK depressio data, erit CSK circulus horizonti parallelus, ad quem sidus in parallelo LRSM incedens citissime perueniat. Fig. 90.

§. 990. Per puncta intersectionis R, S agantur meridiani PrRQ, PsSQ, tempus quo permeatur arcus RS erit ut angulus SPR, siue ut gradus, quos continet arcus rs. Quod si vero iam sidus incedat in parallelo lrsm, patet idem tempus fore ut gradus arcus tv. Quare per naturam maximorum & minimorum uterque hic arcus debet esse aequalis. Erit ergo

$$rs = tv$$

$$tr = sv$$

Sed est

$$sS = rR$$

$$\text{ang. } vsS = trR = 90^\circ$$

unde triangula vsS, trR erunt aequalia & similia. Hinc ergo, demissis verticalibus ZSN, ZRN, erit

$$PSZ = PRZ = rtR = svS.$$

E e §

siue

siue

$$NSQ = NRQ$$

Unde porro per theorematum trigonometricum,
ob $NR = 90^\circ$, & $QR = QS$, erit

$$\cos NQ = \sin QR \cdot \cos NRQ$$

$$\cos NQ = \cos NS \cdot \cos QS + \sin NS \cdot \sin QS \cdot \cos NRQ$$

Quare substitutione facta

$$\cos NQ = \cos NS \cdot \cos QS + \sin NS \cdot \cos NQ$$

unde

$$\cos QS = \frac{\cos NQ (1 - \sin NS)}{\cos NS}$$

siue breuissime

$$\cos QS = \cos NQ \cdot \tan \frac{1}{2} SG$$

§. 991. Erit ergo sinus totus ad sinum eleuationis poli, ut tangens dimidia depressionis datae ad sinum declinationis sideris, quod tempore breuissimo ad eam depressionem pertingit.

§. 992. Porro in triangulis PSZ, PRZ quae communi cruri PZ insistent est

$$PS = PR$$

$$PSZ = PRZ$$

Quare erit

$$\sin SZP = RZP$$

Cum vero hi anguli haud coincidunt, erit alter alterius complementum ad semicirculum, quare

$$SZP = RZE$$

$$HG = OR$$

$$GD = DR$$

Unde ergo verticales SZ, RZ, inter quos est via breuissimo tempore peragranda RZ, ab oriente vel occidente aequae distant.

§. 993.

§. 993. Similiter erit

$$\sin PZ : \sin PRZ = 1 : \sin ZPR = \sin ZS : \sin ZPS$$

adeoque

$$\sin ZPS = \sin ZPR \cdot \sin ZS$$

Sed

$$\cos ZPR = \cot PZ \cdot \cot PR.$$

Ex utraque ergo hac aequatione dabitur arcus semi-diurnus *Ec* & duratio crepusculi *cb*.

§. 994. Porro cum sit

$$\text{ang. } aSb = cRd$$

$$Sab = Rcd$$

$$Sa = Rc$$

erunt triangula *aSb*, *cRd* aequalia & similia, unde

$$ab = cd$$

$$ac = bd$$

$$Sb = Rd$$

§. 995. Sed eodem modo ob

$$GD = DR \text{ (§. 992.)}$$

$$\text{ang. } GDb = dDR$$

$$bGD = dRD = 90^\circ$$

erunt triangula *GDb*, *dDR* aequalia & similia, quare

$$Db = Dd$$

$$Gb = Rd$$

At vidimus esse (§. 994.)

$$RD = Sb$$

Quare erit

$$Sb = Gb = \frac{1}{2}GS$$

Unde aequator *EDbA* depressionem sideris *GS* in *b* bisecat, ut adeo sit (§. 991.)

$$\sin aS = \cos PZ \cdot \tan gbS$$

§. 996.

§. 996. Cumque porro sit

$$ac = bd \quad (\S. 994.)$$

$$Db = Db \quad (\S. 995.)$$

erit

$$ac = 2bD$$

Est ergo in triangulo GDb, hypotenusa dimidia duratio crepusculi, cathetus Gb dimidia depressio solis in fine crepusculi, cathetus alter GD dimidius arcus azimuthalis, angulus GDC eleuatio aequatoris, ut adeo hoc modo detur duratio crepusculi breuissimi independenter a declinatione solis, cum sit

$$\sin Db = \sin Gb : \sin AH$$

§. 997. Sit v. gr.

$$\text{Eleuatio aequatoris } AH = 41^{\circ}, 37'$$

$$\text{depressio solis} \quad GS = 18, 30$$

erit calculo absoluto (§. 991. 996.) tempore crepusculi breuissimi

$$\text{declinatio solis meridionalis } Sa = 6^{\circ}, 59', 36''$$

$$\text{arcus dimidiaae durationis } Db = 14, 0, 23$$

$$\text{arcus dimidii azimuthi } Gd = 10, 34, 0$$

Est ergo locus solis in $\simeq 17^{\circ}, 47\frac{1}{2}'$.

& duratio crepusculi $1^h, 52', 3''$.

Fig. 91.

§. 998. Sit iam CA semidiameter telluris, AD eius superficies, AB altitudo aeris lumen reflectentis, BD eius superficies. Radii solis incidant per rectam SD, in D incuruetur via, ut lumen pergat per DE, atque in E superficiem telluris tangat, pergat porro per EF, atque in F aerem iterum egrediatur. Erit ergo F particula extrema earum, quae a sole directe collustrantur. Ponamus a particula F lumen ita reflecti, ut radius quidam percurrat viam FA, quae in A iterum superficiem telluris tangat, erit A punctum superficiei telluris extre-

extremum, in quo pars athmosphærae directe collustratae FD conspicua est, atque in toto tractu AE erit crepusculum, quod *primarium* vocabimus.

§. 999. Radius FA pergat per AG atque in G athmosphæram egrediatur, erit G ultima athmosphærae particula, quae a radiis semel reflexis collustratur, atque in tractu HG erit crepusculum, quod nobis hic secundarium est. Simili modo concipi poterit crepusculum tertium, quartum &c.

§. 1000. Ductis tangentibus DK, FL, FM, GN, in eas e centro telluris demittantur normales CK, CL, CM, CN, CP, atque anguli KCE, ECL, MCA, ACN, PCH aequales erunt curvaturae viae luminis DE, EF, FA, AG, GH, ipsamque refractionem astronomicam referent, simul ac assumamus, altitudinem aeris reflectentis & refringentis esse eandem, quod quidem absque notabili errore statuere licebit. Porro ratio inter rectas $CK : CE = CL : CE = CM : CA = CN : CA = CP : CH$ erit ea quae est inter sinus anguli inclinationis & refractionis, dum lumen ex spatio ab aere vacuo incidit in aerem, qui est in E, A, H, hancque rationem alibi inuenimus esse $= 1,0003054 : 1$. Cum vero variabilis sit, eam ponemus $= 1,0003 : 1$.

§. 1001. Quodsi iam depressio solis initio crepusculi sit $= 18\frac{1}{2}^\circ$, atque ponamus particulam F esse extremam earum quae in horizonte luminosae videntur, erit angulus ACK $= 18^\circ, 30'$, adeoque

2MCE

$$2\text{MCF} + 3\text{ACM} = 18^\circ, 30'$$

$$\text{MCF} = \frac{18^\circ, 30' - 3\text{ACM}}{2}$$

Dicta porro $\text{AC} = 1$, erit $\text{AM} = 1,0003$, atque
 $\text{CB} = 1,0003 \cdot \sec \text{MCF}$.

Assumta iam refractione horizontali $\text{ACM} = 0^\circ, 32'$, erit

$$\text{MCF} = \frac{18^\circ, 30' - 1^\circ, 36'}{2} = 8^\circ, 27'$$

$$\sec \text{MCF} = 1,01097$$

$$\text{CB} = 1,01127$$

$$\text{AB} = 0,01127 = \frac{1}{89} \cdot \text{AC} = 9,6 \text{ mill. germ.}$$

§. 1002. Contra ea si particula G sit ultima, quae in crepusculo videtur, erit angulus $\text{HCK} = 18^\circ, 30'$, adeoque

$$4\text{MCF} + 5\text{ACM} = 18^\circ, 30'$$

$$\text{MCF} = 3^\circ, 57\frac{1}{2}'$$

$$\sec \text{MCF} = 1,00239$$

$$\text{CB} = 1,00269$$

$$\text{AB} = 0,00269 = \frac{1}{372} \cdot \text{AC} = 2\frac{1}{3} \text{ mill. germ.}$$

§. 1003. Ponamus iam solem esse immotum in S, atque videamus quaenam videatur esse claritas athmosphaerae, dum a loco E versus A, H procedimus. Spectator itaque in E positus in D videt solem occiduum vel orientem, aeremque FD, qua late patet, a radiis solaribus directe collustratum, ita tamen, ut in D longe sit clarior quam in F.

§. 1004. Recedendo in L, pars quaedam aeris clarioris, qui in D est, ipsi veluti occidit, contra ea eleuatur extremitas F, ut adeo in horizonte ibidem videat aerem, qui nonnisi a
 parti-

particulis aeris crepusculi primarii collustratur, quique adeo notabiliter est obscurior.

§. 1005. Dum peruenit in Q extremitas crepusculi primarii F vertici imminet, quae non potest non esse admodum obscura, ob breuitatem rectae QF. At vero aliquanto augetur haec claritas, cum aer, qui est in spatio QEF a toto fere spatio FK collustretur.

§. 1006. Recedendo in R, protenditur recta RF, ut adeo terminus crepusculi primarii & distinctior & clarior videatur. Paullatim tamen, ulterius recedendo cum crepusculo secundario confunditur, quod solum remanet, cum spectator peruenit in A.

§. 1007. Lumen solare curuam DE percurrento debilitatur fere in ratione 2000:1, adeoque percurfa tota via DF debilitatum erit in ratione 4000000:1, quare illud lumen, quod in extremitatem F directe incidit, decies fere debilius erit lumine lunae plenae puncto F verticaliter imminetis. Quare vera extremitas crepusculi primarii F vix ac ne vix visibilis est. Unde ea quae videtur erit inter F & L. Extremitatem crepusculi secundarii G longe adhuc minus esse visibilem, hinc facile patet, atque ad summum videbitur eius medium B, cum solum in horizonte remanet. Hoc enim ab illo offundi, cum spectator est in Q vel in R, ex notabili claritatis differentia tuto colligitur.

§. 1008. Sit AFB circulus verticalis, in quo est sol, AB horizon, F vertex, ut AFBD referat hemisphaerium coeli superius, quale patet spectatori in centro C constituto, atque in hoc
iam

Fig. 92.

iam describam crepusculi variationes, quales eas vespere d. 19. Novembris 1759. *Augustae Vindelicorum* e specula insignis Mechanici G. F. BRANDER observaui.

Hora min.

IV 26. occidit sol in B.

— 29. adparens eius occasus, initium crepusculi primarii, depressio solis 0° , $33'$.

— 36. Caelum in oriente A prope horizontem obscurefcit, parum tamen adhuc minuitur claritas diurna.

V 0. Irruit nox celeri passu. Conspicuae sunt fixae orientales, & Iuppiter a meridie recedens.

— 5. Caelum orientem versus usque in verticem F tenebris obtectum. Micant stellae orientales.

— 12. Tenebrae sese diffundunt ultra verticem, atque in H fere dignoscuntur earum limites, haud tamen ita, ut sumi possit altitudo culminis crepusculi.

— 19. Absque dubitatione discernitur culmen crepusculi in E; Figura eius fere circulum sphaerae maximum ED refert, cum amplitudo horizontalis DB ab utraque parte circuli verticalis AFB ad 90 gradus excurrat. Altitudo culminis EB est $= 8^{\circ}, 30'$, depressio solis $= 8^{\circ}, 3'$.

— 25. Altitudo culminis EB $= 7^{\circ}, 15'$. depressio solis $8^{\circ}, 59'$. amplitudo DB eadem.

Hora

Hora min.

V	31	altitudo culminis EB = 7° , 0'	
		depressio solis - - -	9° , 55'
—	36	altitudo culminis EB = 6, 20	
		depressio solis - - -	10, 42
—	43	altitudo culminis EB = 5, 45	
		depressio solis - - -	11, 48
—	48	altitudo culminis = 5, 0	
		depressio solis - - -	12, 35
		minuitur amplitudo	
—	54	altitudo culminis EB = 4, 30	
		depressio solis - - -	13, 31
—	59	altitudo culminis = 3, 40	
		depressio solis - - -	14, 18
VI	4	altitudo culminis = 3, 15	
		depressio solis - - -	15, 5

amplitudo I B vix est quadraginta graduum. Paullatim quoque crepusculum miscetur lumen zodiacali, unde hanc ob causam & ob frigus intensius abrupta est observatio.

§. 1009. Ceterum notandum altitudines EB potius esse debite maiores quam vero minores, quod factum est, quo magis ad veram eius altitudinem accederem.

§. 1010. Sit iam AC semidiameter telluris, Fig. 93. AK eius superficies, HD superficies aeris lumen reflectentis, tempore occasus solis adparentis terminus crepusculi est in B. Terminus hic successiue progreditur in H, D, atque facile patet angulum BCD aequalem esse depressioni solis sub horizonte, quippe ab hac pendet crepusculi progressus. Ponamus iam culmen crepusculi fuisse in D hora V. min. 19, erit eius altitudo DAK = 8° , 30', depressio solis
F f respon-

respondens $= 8^{\circ}, 3'$, a qua subtrahatur depref-
fio tempore occafus adparentis $0^{\circ}, 33'$, erit

$$BCD = 7^{\circ}, 30'.$$

§. 1011. Ductis tangentibus BF, DG, AE,
ad eas demittantur normales CF, CG, CE,
erit

$$ECA = 8^{\circ}, 30'$$

$$\text{refractio } ECG = 0, 6$$

$$\text{unde } GCA = 8, 24$$

$$\text{Porro } BAC = 90, 0$$

$$\text{refractio } FCA = 0, 33$$

$$GCF = 7, 51$$

§. 1012. Dicta iam $AC = 1$, erit (§. 1000.)

$$CF:CA = CG:CE = 1,0003054:1$$

$$CE = \cos ECA = 0,9890158$$

$$CG = 0,9893178$$

$$CF = 1,0003054$$

§. 1013. Porro cum sit

$$BCF + GCD = BCD + GCF = 15^{\circ}, 17'$$

datur summa angulorum BCF, GCD & ratio
inter cathetos CF, CG utriusque trianguli
rectanguli CBF, CDG, quorum hypotenusae
CB, CD sunt aequales, erit ergo

$$\text{tang} BCF = \frac{CG - CF \cos(BCF + GCD)}{CF \sin(BCF + GCD)}$$

unde subducto calculo habetur

$$\text{tang} BCF = 0,092498$$

$$BCF = 5^{\circ}, 17'$$

$$GCD = 10, 0$$

§. 1014. Est vero

$$CB = CF \cdot \sec BCF$$

Quare erit

$$CB = 1,0045735$$

$$AH = 0,0045735 = \frac{1}{226} \cdot AC = 3,9 \text{ mill. germ.}$$

Quas

Quae ergo ex hoc computo est altitudo aeris lumen reflectentis.

§. 1015. Cum sit

$$BCF = 5^{\circ}, 17'$$

$$FCA = 0^{\circ}, 33'$$

$$BCD = 7^{\circ}, 30'$$

erit

$$BCA = 5^{\circ}, 50'$$

$$ACD = 2^{\circ}, 40'$$

At vero depressio solis tempore occasus adparentis est $0^{\circ}, 33'$, quare eo tempore, quo terminus vel culmen crepusculi est in vertice H, depressio ista erit $= BCA + 0^{\circ}, 33' = 6^{\circ}, 23'$, quae in nostra observatione obtinuit hora Vta, 8 min.

§. 1016. Ob $BCH = HCL = 5^{\circ}, 50'$, erit $BCL = 11^{\circ}, 40'$, adeoque terminus crepusculi primarii occidit, cum depressio solis sub horizonte est $= 11^{\circ}, 40' + 0^{\circ}, 33' = 12^{\circ}, 13'$. At vero depressio solis in fine crepusculi est $= 18^{\circ}, 30'$ quare cum differentia sit $18^{\circ}, 30' - 12^{\circ}, 13' = 6^{\circ}, 17'$, haec erit distantia termini crepusculi primarii & secundarii. Erit itaque

Fig. 91.

$$ECD = 5^{\circ}, 50'$$

$$FCD = 11^{\circ}, 40'$$

unde cum ipsi FCD addendum sit $6^{\circ}, 17'$, terminus ultimus crepusculi secundarii cadet fere in N, ut adeo reliqua eius pars NG visum effugiat, quippe adeo est tenue, ut a lumine, quod stellae fixae in athmosphæra diffundunt obscuretur.

§. 1017. Claritas aeris v. gr. in recta RF eo maior est, quo plures in ea sunt particulae lumen diffundentes quoque clariores fuerint.

Quantitas particularum augetur, imminuto angulo RFQ. Hinc iam sequens explicatur utriusque crepusculi analogia & differentia.

§. 1018. Primarium, cum non modo a radiis solaribus directe illustretur, verum & ab omnibus particulis in LT sitis iisque longe clarioribus lumen quoddam accedat, veluti per se spectabile est, unde eius visibilitas a longitudine rectae RF minus pendet, etsi eius claritas una cum ista recta crescat.

§. 1019. Contra ea visibilitas crepusculi secundarii fere absolute pendet a longitudine rectae RF, per quam videtur. Hinc enim fit, ut nonnisi prope horizontem spectabile sit, atque ibidem paullatim misceatur primario ad occasum properanti.

Fig. 94. §. 1020. Figura crepusculi primarii, cuius limbum semicirculum sphaerae maximum videri diximus, mere est optica. Sit ADBE superficies athmosphaerae lumen reflectentis, sol immineat puncto A, occidet in circulo DE, si iste sit in superficie athmosphaerae, & ob refractionem occidere videbitur in circulo de ipsi DE parallelo, si uterque concipiatur esse in superficie telluris, eritque arcus $dD = 0^\circ, 33'$.

§. 1021. At ob pelluciditatem athmosphaerae radii solares adhuc directe pertingent in circulum FG, qui adeo est terminus crepusculi primarii, atque a circulo de distat $5^\circ, 50'$ (§. 1015.) ut adeo sit $FD = 6^\circ, 23'$.

§. 1022. Terminus crepusculi secundarii cadit in circulum HI prioribus itidem parallelum,

Ielum, estque $HF = 6^{\circ}, 17'$ (§. 1016.) adeoque $HD = 12^{\circ}, 40'$.

§. 1023. At iam arcus atmosphaerae BH, (fig. 93.) quem videt spectator in superficie telluris A est $= BCA = 5^{\circ}, 50'$ (§. 1015.) Sit ergo (fig. 94.) spectator in C, semidiametro $CK = 5^{\circ}, 50'$ e polo C describatur circulus PKL, huius peripheria erit horizon visibilis spectatori, cui verticaliter imminet punctum C, atque arcus KL circuli FKLG erit limbus crepusculi primarii quem videt, cumque ultra 12 gradus non excurrat fere rectilineus erit. At vero eius imago eandem figuram circula-rem adfectat, quam adfectare videmus totam caeli faciem.

§. 1024. Assumta iam (§. 1014.)

Fig. 93.

$$BC = BH = 1,0045735$$

$$BH = 0,0045735$$

facile per angulos HCD dabuntur anguli HAD atque inde definietur, quanam ratione culmen crepusculi D a vertice H recedere & ad eum accedere videatur. At cum operae pretium non sit rem istam calculo trigonometrico absolute, eam constructione peregi. Porro assumendo crepusculum primum esse claritatis constantis eiusque limbum circulum sphaerae maximum, per theorema XII. (§. 145.) quaesivi illuminationem plani horizontalis crepusculo debitam, quae cum sit $= 1 \pm \sin HAD$, dicta altitudine culminis $DAK = a$, erit illuminatio $= 1 \pm \cos a$, atque hinc facile enata est tabella sequens

I	II	III	IV	I	II	III	IV
tem- pus min.	depres- sio ☉	alt. crep. orient.	illu- mina- tio	tem- pus min.	depres- sio ☉	alt. crep. occid.	illu- mina- tio
0	0, 0	- -	- -	42	6,23	0, 0	1,000
3	0,33	0, 0	2,000	43	6,32	60, 0	0,500
17	2,36	2,45	1,999	44	6,41	41,30	0,251
22	3,21	3, 0	1,998	45	6,50	29,30	0,130
27	4, 5	5,30	1,995	46	7,59	22,30	0,075
32	5,50	8,30	1,989	47	7, 9	17,45	0,045
33	5, 1	10, 0	1,985	48	7,18	15,30	0,036
34	5,10	11,30	1,980	49	7,27	13, 0	0,026
35	5,19	13, 0	1,974	50	7,36	11,30	0,020
36	5,28	15,30	1,964	51	7,45	10, 0	0,015
37	5,37	17,15	1,955	52	7,54	8,40	0,011
38	5,46	22,30	1,924	57	8,41	5,30	0,005
39	5,56	29,30	1,870	62	9,27	3, 0	0,002
40	6, 5	41,30	1,749	67	10,14	2,45	0,001
41	6,14	60, 0	1,500	81	12,13	0, 0	0,000
42	6,23	0, 0	1,000				

§. 1025. Tempus quod prima huius tabel-
lae columna exhibet, sunt minuta, quae die
19 Novembris post occasum solis praeterflu-
xerunt, unde ad omnes anni dies extendi ne-
quit. Hanc ob causam secunda columna ad-
iecta est, quae depressionem solis sub horizon-
te cuique altitudini crepusculi respondentem
exhibet. Haec enim ab illa unice pendet. Ex
quarta columna patet instantaneam fere esse
noctis irruptionem, cum sol a sexto gradu ad
septimum infra horizontem delabatur. Tem-
pus vero, quo sol sub elevatione poli $48^{\circ}, 23'$,
ad profunditatem $6^{\circ}, 23'$ peruenit ab occasu
astronomico computatum, est

pro

	h	'	"		'	"
pro o	2	0,51,38		hora	8,48,45	
	3	0,45,42	-	-	4,48,35	
	4	0,38,32	-	-	6,38,32	

§. 1026. Etsi numeri quartae columnae veram illuminationem plani horizontalis non exhibeant, haud tamen ita a vero recedunt, ut tempus, quo citatori passu irruunt densiores tenebrae, differat ab eo quod indicat tabella, quodque depressioni solis $= 6\frac{1}{2}^{\circ}$ respondet. Attendenti facile hoc quotidiana patebit experientia.

§. 1027. Terminus crepusculi secundarii ad verticem properat, primario occidente, quare cum simili gressu progreditur, tunc altera priori superaccedit nocturna caligo, vix tamen facile distinguenda. Absoluta euadit, secundo hoc crepusculo sub horizontem labente.

§. 1028. Progressus crepusculi primarii pendet ab altitudine aeris AH. Quodsi haec assumeretur, qualem eam supra ex unica reflexione deduximus (§. 1001.)

$$AH = 0,01127.$$

longe lentius crepusculum perueniret in H, quippe ipso die, quo eius duratio breuissima est, fere horam integram impenderet (§. 997.)

At vidimus hoc fieri tempore $38\frac{1}{2}$ minutorum (§. 1025.)

Contra ea si sumatur altitudo $AH = 0,00269$ (§. 1002.) crepusculum primum tempore 14 minutorum post solis occasum vertici immineret. Utrumque ab experientia quotidiana abhorret, unde altitudo aeris lumen reflectentis, quam ex nostro com-

puto inuenimus esse $= 0,0045735$ siue fere 4 mill. germ. ad verum longe propius accedit.

§. 1029. Celerrima noctis irruptio pendet a celeritate, qua terminus crepusculi verticem H percurrit, adeoque a celeritate maxima, qua sol, cum $6^{\circ}, 23'$ infra horizontem haeret, deprimitur. Quaeramus quo die anni hoc obtineat. Sit

$$\begin{aligned} \text{distantia poli a vertice} &= a \\ \text{distantia sideris a polo} &= y \\ \text{eiusdem distantia a vertice} &= z \\ \text{eiusdem elongatio a meridie} &= x \end{aligned}$$

erit

$$\cos z = \cos y \cdot \cos a + \sin y \cdot \sin a \cdot \cos x$$

fluant x & z , differentiando habetur

$$\sin y \cdot \sin a \cdot \sin x \cdot dx = \sin z \cdot dz$$

unde ob

$$\sin x = \sqrt{(\sin y^2 \cdot \sin a^2 - (\cos z - \cos y \cdot \cos a)^2)} : (\sin y \cdot \sin a)$$

erit

$$\sin z \cdot dz = dx \sqrt{(\sin y^2 \sin a^2 - (\cos z - \cos y \cdot \cos a)^2)}$$

fluente iam dx & y erit

$$d(\sin z \cdot dz : dx) = 0 =$$

$$\begin{aligned} &[\sin a^2 \sin y \cdot \cos y \cdot dy - (\cos z - \cos y \cdot \cos a) \cos a \sin y \cdot dy] : \\ &[\sqrt{(\sin y^2 \cdot \sin a^2 - (\cos z - \cos y \cdot \cos a)^2)}] \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} \sin a^2 \cos y - \cos a \cdot \cos z + \cos y \cos a^2 &= 0 \\ \cos y &= \cos a \cdot \cos z. \end{aligned}$$

His

crepusculi, atque definitur, quo successu &c. 457

Debet ergo sol esse in circulo verticali, qui aequatorem in horizonte intersecat, siue eius azimuth erit $= 90^\circ$. Porro Ut se habet sinus totus ad sinum elevationis poli, ita se habebit sinus depressionis solis $6^\circ, 23'$ ad sinum declinationis solis ab aequatore, quae hoc casu australis est. Sub elevatione poli $48^\circ, 23'$ haec declinatio est $= 4^\circ, 46'$, atque cadit in $12^\circ, 2', 22'' \approx$ & $17, 57, 38 \times$. siue in 5. Octobris & 7. Martii. His ergo fere diebus nox celerrime irruit.



PHOTOMETRIAE

PARS VI.

QVA CALCULO SVBICITVR
ILLVMINATIO
SYSTEMATIS PLANETARII.

CAPVT I.

Calculo peruestigantur modificationes luminis lunaris.

§. 1030.

Quam iam ingredimur prouinciam, eam in se susceperunt geometrarum plurimi, quos inter Cel. THVMIGIVS, SMITHIVS, KIESIVS, EVLERVS, BOVGVER supra iam passim laudati Cel. THVMIGIVS potissimum densitatem luminis solaris normaliter in planetas primarios incidentis calculo prosequutus est, eamque posuit esse reciproce ut quadratum distantiae, unde ratum esse eius calculum, si singuli planetae eadem *albedine* gaudere statuantur, supra iam notauimus (§. 117.) Cel. KIESIVS in *Commentariis Academiae Regiae Berolinensis* varios istos casus examinavit, quibus *Veneris* splendor maximus est, distinctionem tamen inter claritatem visam & illuminationem praetermisisse videtur, quod & ab aliis factum esse supra diximus (§. 37. 73.) Experimentis rationem inter claritatem solis & lu-

& lunae plenae definiuit Cel. BOVGVER, eamque esse statuit ut 300000 ad 1. Duplici quoque raticinio eandem quaesivit Cel. SMITHIVS, eamque, posita lunae albedine absoluta, inuenit esse $= 90900 : 1$, lumen phasium lunae decrescere ponit in eadem ratione, qua decrescit latitudo phaseos in disco lunari. Rationem istam quadruplo maiorem siue $= 374000 : 1$ ex suis principiis inuenit Cel. EVLERVS, in scripto iam supra laudato (§. 71.) Uterque claritatem visam & illuminationem confundit, atque ab angulo emanationis animum abstrahit.

§. 1031. Ex nostris ergo principiis, quae specialiora sunt, atque experimentis omnimode firmata, rem istam absoluere propositum est, eumque in finem sequentia, quae generaliora sunt, praestruemus.

§. 1032. Observationibus astronomicis constat figuram planetarum ad sensum esse sphaericam, Ioue excepto, cuius figura a sphaerica notabilius differt. Porro constat eorum superficies esse asperiores, corporibusque terrestribus, quae opaca sunt lumenque dispergunt, valde similes. Diuersi quoque coloris esse planetarum corpora vel simplici obtuto patet. Pallet Saturnus, albicat Jupiter, rutilat Mars, albidiorum lumine micat Hesperus, coruscat Mercurius, flauet Luna. Diuersi claritatis gradus non modo ab eorum a sole distantia, verum & ab ipsa albedine corporum planetarum pendent. Contra ea diuersus color unice inde est, quod corpora ista radiorum diuersi coloris alios copiosius reflectant, alios maiori copia absorbeant.

§. 1033.

§. 1033. Hinc ergo sequitur, lumen planetarum eodem calculo esse prosequendum, quem in superioribus corporibus opacis minusque politis adplicauimus, atque pro quouis planeta peculiarem assumendam esse albedinem siue rationem inter lumen incidens & reflexum. Unde ergo facilius comparabuntur eiusdem planetae diuersae phases, quam vero eadem phases planetarum diuersorum inter se.

§. 1034. Porro constat obseruationibus telescopicis lunam ceterosque planetas scaterere maculis, diuersasque superficiei potissimum lunaris partes diuersa claritate gaudere, dari in ista montes, valles atque cauitates plurimas, quae umbram lumini miscent, ipsas maculas esse alias aliis obscuriores, locaque non maculosa claritate inter se differre, dari in luna montes aliaque loca nitidiori lumine micantia, aliaque veluti omni nitore destituta.

§. 1035. Irregularitates istae calculum mirum in modum redderent complexum, si ad singulas minutias attendere oporteret. At medium quoddam in his tenere propositum est. Etenim a montibus vallibusque animum abstrahere licet, quippe ab hisce luminis solaris in totam lunae superficiem incidentis quantitas non turbatur, cum ad totam superficiem habeant rationem fere incommensurabilem. Quod porro ad diuersam singularum partium claritatem attinet, ex singulis istis mediam assumere licebit, quam simpliciter *albedinem planetae* vocabimus.

§. 1036.

§. 1036. Quodsi porro planetam quendam circumfluat athmosphæra, alio insuper modo turbatur luminis calculus, a quo tamen in sequentibus animum abstrahemus, cum in his nil certi statui possit. Athmosphæram, quam lunae tribuerunt plurimi, valde dubiam esse, solidioribus rationibus adstruxit Cel. T. MAY'ER, cui pleniorum motuum lunarium computum debet eruditus orbis.

§. 1037. Porro vel ex superioribus constat, qua ratione turbetur lumen planetarum, dum athmosphæram telluris transit. Unde eius utique habenda est ratio, si lumen planetarum experimentis inter se conferre quis voluerit. Hic vero ab isto discrimine animum abstrahere licet.

§. 1038. Denique claritas visa planetarum duplici modo pendet ab ipso oculo. Variatio aperturæ pupillæ eam reddit variam, atque hanc ob causam luna minus clara videbitur, cum minor sit apertura oculi lunam intuentis, ac est, cum intuetur planetas, luna sub horizonte latente. Porro cum planetarum diametri adparentes adeo sint parui, eorum imago in retina oculi maius spatium occupat, ac occupare deberet, si oculus esset perfecte presbita, nullique radii in aere diuergerent. Hanc vero ob causam ceteris licet paribus obscurior videbitur planeta, quo minor est eius diameter adparens, quoque magis oculus est myops.

§. 1039. Sit iam AFBG luna vel alius planeta, C eius centrum, concipiatur planum per centra solis telluris atque lunæ transiens, atque

Fig. 95.

que in hoc plano sit circulus maximus FDG. Recta CE iungat centra lunae atque telluris, recta vero CD centra solis & lunae, ita ut tellus immineat puncto E, sol vero puncto D, quod sit in medio semicirculi FDG, atque erit FAGB hemisphaerium lunae a sole collustratum. Sint A, B poli circuli FDG, ex his ducantur circuli AEB, ADB per puncta E, D, atque duo alii quicunque sed infinite vicini AMB, AmB. Jam quaerenda sit claritas media sectoris sphaerici AFBMA e tellure visa.

§. 1040. Sumto arcu Pp, ducantur ex polo A paralleli pq, PQ, atque definienda est spatioli Ppqq tum illuminatio tum magnitudo adparens. Quare fiat semidiameter lunae $CE = 1$

$$AP = x \quad FE = a$$

$$FM = y \quad EM = y - a$$

eritque spatiolum

$$PQqp = dy \cdot \sin x \cdot dx.$$

Huius vero magnitudo adparens decrescit ut

$$\cos EP = (\cos a \cdot \cos y + \sin a \cdot \sin y) \sin x$$

quare si magnitudo ista adparens dicatur $= ddz$, erit

$$ddz = dx \cdot \sin x^2 (\cos a \cdot \cos y \, dy + \sin a \cdot \sin y \cdot dy)$$

Posita iam y & dy const. erit

$$dz = \frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) \cdot (\cos a \cdot \cos y \, dy + \sin a \cdot \sin y \, dy)$$

Sed posita x const. erit addita debita constante

$$z = \frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) \cdot (\sin(y - a) + \sin a)$$

Quae est magnitudo adparens segmenti IAP.

§. 1041.

§. 1041. Lumen in spatiolum PQqp incidens est ut $\cos \sin DP = \sin y \cdot \sin x$. cum decre-
scat ut sinus incidentiae, quare dicta semidia-
metro solis adparente, cum e luna videtur
 $= s$, albedine lunae $= A$ (§. 1035. 727.) clari-
tate solis $= 1$, erit claritas particulae siue spa-
tioli PpqQ $= A \cdot \sin y \cdot \sin x \cdot \sin s^2$. (§. 109. 137.
767.)

§. 1042. Ut vero habeatur summa clarita-
tum visarum, atque ex iis sumi possit media,
claritas ista multiplicanda est per magnitudi-
nem spatioli adparentem ddz, quare dicta ista
summa $= q$, erit

$$ddq = A \sin s^2 \cdot \sin x^3 \cdot dx (\cos a \cdot \cos y \cdot \sin y \cdot dy + \sin a \cdot \sin y^2 \cdot dy)$$

Quae formula eodem modo integratur ac prae-
cedens, erit ergo summa claritatum spatii IAP

$$2q = \left(\frac{2}{3} - \cos x + \frac{1}{3} \cos x^3 \right) \cdot (y \sin a + \sin y \cdot \sin (y - a)) A \cdot \sin s^2$$

§. 1043. Quodsi iam sumantur sectores in-
tegrum AFBMA, erit

$$x = 180^\circ = \pi, \sin x = 0, \cos x = -1. \text{ unde}$$

$$z = \frac{1}{2} \pi (\sin (y - a) + \sin a)$$

$$q = \frac{2}{3} (y \cdot \sin a + \sin y \cdot \sin (y - a)) \cdot A \sin s^2$$

§. 1044. In plenilunio est $a = 90^\circ$, unde
pro quolibet sectore erit hoc casu

$$z = \frac{1}{2} \pi (1 + \cos MG)$$

$$q = \frac{2}{3} (FM + \sin MG \cdot \cos MG) A \cdot \sin s^2$$

§. 1045. Denotet iam sector AFBMA pha-
sin lunae integram, erit

$$EM = y - a = 90^\circ$$

$$\sin EM = 1$$

$$FM = a + 90^\circ = a + \frac{1}{2} \pi = \pi - ED$$

$$\sin FM = \cos a = \sin ED.$$

Est

Est vero ED distantia lunae ab oppositione. His ergo valoribus in formulis §. 1043. substitutis, erit

$$z = \frac{1}{2}\pi(1 + \cos ED)$$

$$q = \frac{2}{3}(\cos ED(\pi - ED) + \sin ED).A.\sin s^2$$

§. 1046. Habetur autem claritas phaseos totius media si summa claritatum q per z dividatur. Dicta ergo claritate media $= \eta$, erit

$$\eta = q : z$$

§. 1047. Ponatur $\pi - ED = v$, erit v distantia lunae a sole siue a coniunctione, quare hoc valore substituto habebitur

$$z = \frac{1}{2}\pi(1 - \cos v)$$

$$q = \frac{2}{3}(\sin v - v.\cos v).A.\sin s^2$$

unde

$$\eta = \frac{4(\sin v - v \cos v).A.\sin s^2}{3\pi(1 - \cos v)}$$

Quae adeo est claritas phaseos visa media. Facili vero substitutione facta habebitur

$$\eta = \left(\frac{4 \cot \frac{1}{2}v}{3\pi} - \frac{4v \cot v \cdot \cot \frac{1}{2}v}{3\pi} \right) A.\sin s^2$$

§. 1048. Pro plenilunio est $v = 180^\circ = \pi$, $\sin v = 0$, $\cos v = -1$, adeoque

$$\eta = \frac{2}{3}.A.\sin s^2$$

Quod si ergo ponamus albedinem lunae A esse $= \frac{1}{4}$, semidiametrum $s = 0^\circ, 16'$ erit

$$\eta = \frac{1}{8}(\sin 16')^2$$

adeoque

$$\eta : 1 = 1 : 277000$$

toties ergo claritas solis claritatem plenae lunae mediam superaret, si assumpta albedo $A = \frac{1}{4}$ vera esset. $\angle$ Et si vero haec ratio ab ea quam
Cel.

Cel. BOVGVER experimentis definiuit, quamque medium sumendo posuit esse numero rotundiori — 1:300000, parum differat, atque insuper coincidat cum placitis cel. SMITHII, qui claritatem lunae claritati caeli sudi mediae ponit aequalem, quam supra (§. 914.) plane eandem inuenimus: attamen claritas lunae mea quidem sententia minor est. Etenim albedo $A = \frac{1}{4}$, quam ipsi hic tribuimus admodum est notabilis. Vidimus supra albedinem cerussae tantum esse $\frac{2}{3}$ (§. 754.) unde albedo lunae media dimidiam eius partem excederet. Quodsi ergo perpendamus lunam magna ex parte maculosam esse, oporteret partes clariores albedine cerussa parum essent inferiores, quod quidem vix ac ne vix concedi poterit, licet natura corporum lunarium plane nos lateat. Etsi porro valor ipsius $A = \frac{1}{4}$ fere cum eo congruat, quem in experimento XXIX (§. 757.) pro charta flaua inuenimus, attamen rationem iam reddidimus (§. 763.) cur hoc casu maior fuerit haec quantitas. Haec vero ratio corporibus lunaribus vix erit adplicabilis.

§. 1049. Experimentum BOVGVERIANVM instaurandi haecenus mihi defuit oportunitas, unde verum ipsius A valorem hic in dubio relinquens, ad ea reuertar, quae certiora sunt. Cum enim valor iste claritates singularum phasium eodem modo augeat, facile patet, eas inter se independenter ab isto valore comparari posse.

§. 1050. Insuper & hoc notabimus, A finis² esse claritatem puncti D, siue claritatem plenae lunae

lunae centram, ut adeo quid sibi velit hoc modo oculis subiiciatur. Quodsi hanc claritatem claritati telluris a sole normaliter collustratae aequalem ponere volueris, quod in sua demonstratione tacite supposuit cel. SMITHIUS, hoc ipso albedinem lunae & telluris pones esse eandem, quod quidem haud ita liquido constat. Claritatem vero istam iam ponemus $=1$, atque per eam claritatem praecipuarum phasium mediam ex formula §. 1047. computatam in tabella sequente ob oculos ponemus.

Elonga- tio $\nearrow$ a $\odot$ v	claritas pha- seos visa media η	Elonga- tio $\nearrow$ a $\odot$ v	claritas pha- seos visa media η
0°	0,0000	90°	0,4244
10	0,0494	100	0,4657
20	0,0986	110	0,5048
30	0,1475	120	0,5413
40	0,1959	130	0,5747
50	0,2437	140	0,6043
60	0,2907	150	0,6294
70	0,3366	160	0,6490
80	0,3814	170	0,6619
90	0,4244	180	0,6666

§. 1051. Numeri huius tabellae claritatem phasium visam exhibent, & unitas, ad quam referuntur, est claritas plenae lunae centralis, siue claritas visa eorum locorum, in quae radii solares normaliter incidunt, eaque ex cunctis media. Haud ergo pendent a distantia lunae

lunae geocentrica (§. 794) sed vel maxime a distantia solis, quippe unitatem posuimus esse $A. \sin s^2$, ut adeo unitas assumpta pluribus modis variabilis sit.

§. 1052. Quodsi enim eandem phasin, v. gr. plenilunium spectes, huius claritas mutationem subibit annuam, quippe una cum tellure luna in aphelio telluris soli propior est ac in perihelio. Unde eadem lunae phasis hieme trigesima circiter parte clarior erit quam aestate.

§. 1053. Porro manente telluris a sole distantia, unitas assumpta minor erit in plenilunio ac in nouilunio, cum luna plena magis a sole distet quam noua. Ponamus tellurem & lunam eo tempore quo utraque circum proprium axem voluitur, aequale spatium in orbita sua emetiri, quod etsi demonstrari nondum possit, a vero tamen vix aberrabit. Motus vertiginis lunae absoluitur mense periodico, telluris vero unius diei decursu, quare peripheria orbitae lunaris aequalis erit arcui diurno orbitae telluris medio, atque distantia lunae a tellure media ad mediam telluris a sole distantiam erit ut tempus unius diei naturalis medii ad tempus anni, adeoque fere ut 1 ad $365\frac{1}{4}$. Singularis haec positio forsitan a motu vertiginis lunae non minus singulari pendet digna certe quae curatius examinetur.

§. 1054. Erit ergo distantia heliocentrica plenilunii ad eam nouilunii ut $364\frac{1}{4}$ ad $366\frac{1}{4}$, quare cum unitas assumpta decreseat reciproce ut quadrata distantiarum a sole, dicta unitate ista

pro quadraturis $\equiv 1,0000$

erit eadem pro plena luna $\equiv 0,9945$

pro noua luna $\equiv 1,0055$

& pro qualibet alia phasi $\equiv 1 + 0,0055 \cdot \cos v$

Hic enim a minutiis animum abstrahimus.

§. 1055. Sit porro distantia telluris a sole media $\equiv 1$, orbitae telluris eccentricitas $\equiv e \equiv 0,017$, anomalia media $\equiv \alpha$, erit distantia ipsi respondens proxime

$$\equiv 1 + e \cdot \cos \alpha + e^2 \cdot \sin \alpha^2$$

siue

$$\equiv 1 + 0,017 \cos \alpha + 0,000289 \sin \alpha^2$$

Unde neglectis iterum minutiis unitas, ad quam referuntur numeri praecedentis tabellae pro qualibet phasi lunae, & pro qualibet anomalia media telluris erit

$$\equiv 1 - 0,034 \cos v + 0,0055 \cos \alpha.$$

Per hanc ergo in dato quouis casu multiplicandus erit numerus ex praecedente tabella deductus, quo habeatur claritas phaseos media ad eam unitatem reuocata, quae claritatem plenae lunae centralem exhibet, eo tempore, quo eius distantia heliocentrica est $\equiv 1$, siue radius orbis magni.

§. 1056. Definitis iam modificationibus claritatis phasium lunae, extra atmospheraem telluris spectandae, iam videamus quaenam inde prodeat illuminatio plani itidem extra atmospheraem lunae normaliter obuersi. Utique haec ab illa est diuersissima, cum pendeat a magnitudine phaseos adparente adeoque & a distantia lunae geocentrica, a qua claritas visa tantummodo pendet in minutiis iure meritoque reiiciendis.

§. 1057.

§. 1057. A plena luna ut ordiamur, dicta claritate solis $= 1$, vidimus claritatem mediam cuiusvis phaseos esse (§. 1047.)

$$\eta = \frac{4(\sin v - v \cdot \cos v) A \sin s^2}{3\pi(1 - \cos v)}$$

atque hinc habuimus claritatem mediam plenilunii

$$\eta = \frac{2}{3} A \sin s^2.$$

Sit ergo semidiameter solis e tellure visa $= S$, semidiameter lunae $= \sigma$, claritas plani quod absolute album ponemus, cum a sole normaliter collustratur $= C$, cum a plena luna collustratur $= c$, erit (§. 109. 715.)

$$C = (\sin S)^2$$

$$c = \frac{2}{3} A \sin s^2 \cdot \sin \sigma^2$$

adeoque

$$C:c = \sin S^2 : \frac{2}{3} A \sin s^2 \cdot \sin \sigma^2$$

Data ergo albedine lunae media A , facile hinc dabitur ratio inter illuminationem soli lunaeque debitam.

§. 1058. Contra ea si luna fuerit extra syrigias, illuminatio inde nascens decrescet in ratione composita ex claritate media visa & area phaseos. Prior ratio est

$$= \frac{2}{3} A \sin s^2 : \frac{4(\sin v - v \cdot \cos v) A \sin s^2}{3\pi(1 - \cos v)}$$

altera vero

$$= 2\pi : \pi(1 - \cos v)$$

Quare cum in utraque hac ratione minuatur claritas plani plenilunio debita

$$c = \frac{2}{3} A \sin s^2 \cdot \sin \sigma^2$$

G g 3

erit

erit ista iam

$$e = \frac{2(\sin v - v \cdot \cos v) A \sin s^2 \sin \sigma^2}{3\pi}$$

unde

$$C : e = \sin S^2 : \frac{2(\sin v - v \cdot \cos v) A \sin s^2 \sin \sigma^2}{3\pi}$$

$$o = \frac{2(\sin v - v \cdot \cos v) A \sin s^2 \sin \sigma^2 \cdot C}{3\pi \cdot \sin S^2}$$

§. 1059. Quod si ergo & hic quantitatem

$$\frac{A \sin s^2 \sin \sigma^2 \cdot C}{\sin S^2}$$

$$\sin S^2$$

ceu unitatem spectemus, quippe quae a phase lunae fere non pendet, erit

$$e = \frac{2(\sin v - v \cdot \cos v)}{3\pi}$$

Unde sequens concinnatur tabella cum praecedente comparanda.

Elonga- tio γ a $\odot$ v	illumina- tio plani a phase γ, c	Elonga- tio γ a $\odot$ v	illumina- tio plani a phase γ, c
0°	0,0000	90°	0,2122
10	0,0004	100	0,2733
20	0,0030	110	0,3387
30	0,0099	120	0,4060
40	0,0229	130	0,4720
50	0,0435	140	0,5336
60	0,0727	150	0,5872
70	0,1107	160	0,6294
80	0,1576	170	0,6569
90	0,2122	180	0,6666

§. 1060. Numeri huius tabellae se habent ad numeros analogos tabellae praecedentis ut diameter lunae adparens ad latitudinem phaseos, unde neque claritas neque illuminatio in ratione simplici phasium, sed illa longe lentius haec vero celerius decrescit.

§. 1061. Porro unitas ad quam referuntur numeri huius tabellae

$$\frac{A \sin s^2 \sin \sigma C}{\sin S^2}$$

quadruplici modo variabilis est. Est vero ratio $C: \sin S^2$ albedo plani, quo normaliter excipitur lumen phaseos, quae ergo si dicatur $= a$, unitas ista erit

$$A.a \sin s^2 \sin \sigma^2$$

adeoque duplici modo adhuc variabitur. Ut ergo utraque ista variatio ad unitatem constantem reuocetur, ponamus, lunam una esse

in distantia heliocentrica radio orbis magni aequali & in distantia geocentrica media, hoc casu erit

$$s = 0^{\circ}, 32', 10''$$

$$\sigma = 0, 31, 30$$

§. 1062. Quodsi iam assumamus numeros tabellae ad hunc casum referri, facile patebit, qua ratione pro ceteris casibus augendi & minuendi sunt. Manente enim semidiametro lunae adparente s , numeri isti multiplicandi erunt per quantitatem (§. 1055.)

$$1 - 0,034 \cos v + 0,0055 \cos \alpha$$

quo habeatur eorum valor, quatenus iste a distantia lunae heliocentrica pendet. Porro dicta distantia lunae media $= 1$, ea quae quouis alio tempore obtinet $= \delta$, numeri isti insuper diuidendi erunt per $\delta\delta$. Et hic enim minutias negligimus, quas si in computum inducere volueris, semidiametri s , σ ex tabulis lunaribus pro dato quouis momento sunt definiendae, quo curatius unitas ista determinetur. Sic enim eam & a parallaxi lunae adeoque ab eius altitudine supra horizonem pendere videbis.

§. 1063. Data vero opera in hoc calculo sumimus claritatem lunae mediam ex singulis claritatibus partialibus. Etenim ob inaequalem lunae superficiem singuli fere anguli incidentiae ubique obtinent, quod secus esset, si superficies lunaris perfecte esset sphaerica, qualem eam esse ob concinnitatem calculi assumimus. Hoc vero modo singulos angulos incidentiae in ea lunae loca transtulimus, ubi reuera futura forent, si figura assumpta vera esset.

esset. Unde hac ratione aberrationes quodammodo compensantur. Sic v. gr. in plenilunio radii solares in latera montium, qui limbum lunarem cingunt, minus oblique incidunt. Contra ea obliquior est incidentia in declivitates montium & cavitatum quae centro disci lunaris sunt propiores. Hoc vero modo claritates partium plenae lunae magis ad aequalitatem reducuntur, atque hinc est, ut limbus lunae, cum pleno orbe lucet, clarior videatur ac foret, si eius superficies esset perfecte sphaerica.

§. 1064. Videamus iam, quaenam foret illuminatio plani si luna priori casu esset absolute alba, atque si esset speculum sphaericum perfecte reflectens. Sit ergo claritas lunae a sole normaliter collustratae, claritas plani, quod itidem absolute album ponemus, erit tempore plenilunii (§. 1057.)

$$c = \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \sigma$$

At vero si luna esset speculum perfecte reflectens foret (§. 671.)

$$c' = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \sigma$$

quare erit

$$c : c' = \frac{2}{3} : \frac{1}{4} = 8 : 3$$

adeoque illuminatio in casu perfectae albedinis erit ad eam, quae debetur speculo, ut 8 ad 3. Haec obtinerent, cum luna est in oppositione. At supra vidimus illuminationem plani speculo debitam a situ lunae ratione solis fere non pendere (§. 671.) Contra ea notabiliter decrescit illuminatio lunae debita, si haec ponatur opaca, quantumvis licet alba. Sic enim, quod ex tabella §. 1059. patet, in

quadraturis iam ad tertiam partem reducitur, ut adeo hoc casu sit

$$c:c = \frac{2}{3}:\frac{1}{4} = 8:9$$

Etsi ergo utroque casu eadem radiorum quantitas in lunam incidat eademque tota quanta est reflectatur & dispergatur, attamen hinc patet reflexionem, quae fit a speculo diuersissimam esse a dispersione, quae fit a corpore absolute albo.

§. 1065. Experientia constat partem lunae deficientem tenui adhuc lumine tubis astronomicis conspicuam esse, cum luna coniunctioni est proxima. Hoc vero lumen a tellure tunc partem a sole collustratam lunae fere totam obuertente in lunam reflecti extra dubitationis aleam positum est, quippe in eadem fere ratione decrescere videtur, qua decrescit lumen phaseos telluris e luna spectabilis. Hoc iam lumen calculo sequentem in modum perlustrabimus.

§. 1066. Ob immensam solis distantiam assumere licebit phasin telluris e luna spectandam esse complementum phaseos lunae e tellure visae. Porro facile patet illuminationem lunae a tellure, si ab atmosphaera telluris abstrahamus animum, eodem absolui calculo, quo antea illuminationem telluris a luna peruestigauimus, ratione habita diuersae albedinis diuersaeque semidiametri adparentis. Similiter quod facile obuium est, phasis telluris lumen in lunam haud secus proiicit, ac sol in plenilunio. Quare primo definiemus claritatem, quae in medio disci lunaris inde oritur.

§. 1067.

§. 1067. Sit ergo albedo telluris a , eius semidiameter adparens e luna spectata Σ , distantia lunae a coniunctione $= v$, eiusdem distantia ab oppositione $= \pi - v$, claritas in centro lunae telluri debita $= x$, atque in formula supra eruta (§. 1058.)

$$c = \frac{2(\sin v - v \cos v) A \sin^2 \sigma \sin^2 \Sigma}{3\pi}$$

sequentes faciendae sunt substitutiones.

1°. Albedini lunae A substituenda albedo telluris a .

2°. Semidiametro lunae σ substituenda semidiameter telluris Σ .

3°. Cum phasis telluris sit complementum phaseos lunaris

pro v substituendum $\pi - v$

pro $\sin v$ $= - \sin(\pi - v) = - \sin \pi - v = - \sin v$

pro $+ \cos v$ $= - \cos(\pi - v) = - \cos \pi - v = + \cos v$

4°. Semidiametrum solis s , cum minutias in hisce negligamus retinebimus eandem

5°. Cumque c sit claritas plani absolute bi, (§. 1057.) ut ista abeat in claritatem lunae, formula multiplicanda est per albedinem lunae A . Unde erit

$$x = \frac{2}{3\pi} (\sin v + (\pi - v) \cos v) a A \sin^2 \Sigma^2$$

Quae adeo erit claritas centri lunae telluris phasi debita, quaeque utique maxima est, cum incidentia luminis sit normalis. Unitas vero in hoc computo ut in superiori (§. 1041. seqq.) est claritas solis.

§. 1068.

§. 1068. Hinc iam facile habebitur claritas media phaseos lunae deficientis. Esto AMBFA pars lunae obscura, erit

$$FM = y = \pi - v$$

$$FE = a = \frac{1}{2}\pi$$

At vero sector AMBF a tellure eodem modo collustratur ac a sole tempore plenilunii, quare si in formulis (§. 1044.) pro hoc sectore erutis

$$z = \frac{2}{3}\pi(1 + \cos MG)$$

$$q = \frac{2}{3}(FM + \sin MG \cdot \cos MG) A \cdot \sin s^2$$

illuminationi normali lunae, quae soli debetur, substituatur ea quae debetur phasi telluris, quaeque est $= x$ (§. 1067.) erit ut supra (§. 1046.) claritas media sectoris AMBF siue partis lunae obscurae $= q:z$, qua dicta $= K$, habebitur

$$K = \frac{4x((\pi - v) + \sin v \cdot \cos v)}{3\pi(1 + \cos v)}$$

siue facili reductione facta

$$K = x \left(\frac{4(\pi - v) \cdot \text{tang} \frac{1}{2}v}{3\pi \cdot \sin v} + \frac{4 \cdot \text{tang} \frac{1}{2}v \cdot \cos v}{3\pi} \right)$$

§. 1069. Quatenus ergo claritas phaseos lunae η (§. 1058.) claritas partis deficientis centralis x eiusdemque partis claritas media ab ipsis phasium variationibus pendent, eas sequenti tabella a nouilunio ad quadraturam usque ob oculos ponemus.

v	$K:z$	$\frac{z}{aAs^2\Sigma^2}$	$\frac{K}{aAs^2\Sigma^2}$	$\frac{c}{As^2}$
0	0,6666	0,6666	0,4444	0,0000
10	0,6710	0,6569	0,4408	0,0494
20	0,6877	0,6294	0,4328	0,0986
30	0,6949	0,5872	0,4080	0,1475
40	0,7055	0,5336	0,3765	0,1959
50	0,7134	0,4720	0,3367	0,2437
60	0,7151	0,4060	0,2903	0,2907
70	0,7088	0,3387	0,2401	0,3366
80	0,6930	0,2733	0,1894	0,3814
90	0,6666	0,2122	0,1415	0,4244

§. 1070. Prima columna huius tabellae continet gradus elongationis lunae a sole, secunda ex formula §. 1068. deducta exhibet rationem inter claritatem partis lunae deficientis centralem z & mediam K . Tertia ex formula §. 1067. deducta, vel quod eodem redit ex tabella §. 1059. desumpta decrementum eiusdem claritatis centralis sistit. Quarta ex multiplicatione numerorum columnae secundae & tertiae nascens, idem decrementum pro claritate media K exhibet. Quintam, quae incrementum phaseos lunae a sole collustratae ostendit, ex tabella §. 1050. praesenti adiunximus. Numeri trium posteriorum columnarum ad eandem unitatem reuocantur, si utraque columna tertia & quarta multiplicetur per factum ex albedine lunae A , telluris a , & quadratis semidiametrorum solis s & telluris Σ ; quinta vero per factum ex albedine lunae &

qua-

quadrato semidiametri solis, hoc facto unitas ista erit claritas solis extra athmosphæram visa. Unde cum columna tertia & quarta eadem ratione mutetur, numeri, quos utraque continet, absque ista multiplicatione inter se conferri possunt. Eos vero eadem ratione proxime decrescere vel ex columna secunda evidens est.

§. 1071. Difficilius inter se conferuntur columna quarta & quinta, cum illa sola ab albedine telluris media pendeat. Experimentis rem absolueri vix dabitur. Etsi enim uterque oculus armetur teloscopio, atque inter utriusque lentis obiectiuæ aperturam ea quaeratur ratio, qua lumen phæcos atque partis deficientis ad æqualitatem reducatur, attamen adeo parua erit alterius lentis apertura, ut eius diameter vix exacte mensurari possit. Accedit dubium an eadem claritas utrique oculo eadem videatur, quod certe haud contemnendum est. Denique cum lumen istud adeo sit tenue alia adhuc superuenit difficultas. Supra enim iam vidimus eo incertius esse oculi iudicium, quo minor est claritas comparanda (§. 270.)

§. 1072. Albedo telluris non tam ab ipsa telluris superficie quam vero ab athmosphæra pendet. At aquae superficies exiguam luminis partem reflectit, atque color aquae marinae valde tenuis est. Partes continentis, si loca excipias niue tecta exiguam luminis partem reflectunt (§. 753. 758.) Contra ea vidimus claritatem athmosphærae notabiliorem esse (§. 908. 909. 985. 986.) eamque ad claritatem

tatem cerussae a sole in altitudine 60 gr. haerente normaliter collustratae se habere ut 2 ad 5. (§. 915.) Quare cum albedo cerussae sit $\frac{1}{10}$ (§. 755.) atque radii solares ex altitudine 60° per aerem delabentes debilitentur ut 5 ad 3, claritas plani absolute albi erit ad claritatem atmosphaerae mediam ut $(\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2}) : \frac{2}{5} = 125 : 12 = 10\frac{1}{2} : 1$. Ea ergo est claritas atmosphaerae, quae foret claritas plani a radiis solaribus extra aerem normaliter collustrati, cuius albedo est $\frac{2}{21}$. Unde si nullum aliud lumen a tellure in lunam reflecteretur, albedo telluris foret $\frac{1}{10}$. Quodsi ergo hanc a corporibus terrestribus tertia vel quarta parte augeri ponamus, albedo ista erit $\frac{1}{7}$ vel $\frac{1}{8}$. Atque vix maior erit albedo lunae, etsi maiorem eam esse experimenta BOVGVERIANA docere videantur. (§. 1048.) Ceterum ob maximam atmosphaerae mutabilitatem (§. 910.) admodum variabilis est ista telluris albedo.

§. 1073. Quodsi tamen exempli ergo ponamus $a = \frac{1}{7}$, $s = 16'$, $\Sigma = 1^\circ$. erit

$$a \cdot \sin \Sigma^2 = 0,00004351235.$$

Per hanc quantitatem multiplicentur numeri columnae tertiae & quartae tabellae praecedentis, atque inde formabitur sequens.

v	$\frac{z}{A.\sin s^2}$	$\frac{K}{A.\sin s^2}$	$\frac{C}{A.\sin s^2}$
0	0,000002901	0,000001934	0,00000
10	0,000002858	0,000001918	0,0494
20	0,000002739	0,000001903	0,0986
30	0,000002555	0,000001887	0,1475
40	0,000002322	0,000001538	0,1959
50	0,000002054	0,000001465	0,2437
60	0,000001767	0,000001164	0,2907
70	0,000001474	0,000001045	0,3366
80	0,000001189	0,000000824	0,3814
90	0,000000923	0,000000615	0,4244

§. 1074. Numeri huius tabellae ad eandem unitatem sunt reducti, quae est claritas plenilunii centralis (§. 1051.) Est enim columna quarta claritas phaseos lunae media, columna tertia claritatem mediam partis deficientis, secunda claritatem eiusdem partis centralem, prima vero elongationem lunae a coniunctione exhibet.

EXPERIMENTVM XXXIV.

Fig. 96. §. 1075. Noctu mensae FE fenestrae admotae, quae aperta erat, & per quam lumen lunae plenae incideret ex altitudine 63 gr. horizontaliter imposui planum album AD, atque in medio B erexi planum nigrum BG, quod umbram lunae proiiceret in BD, umbram candela in C collocandae in partem anticam BA, adeoque haec a luna sola, illa vero a sola candela illuminaretur. Quo facto

eup

eum quaesivi candelae situm CE, quo utraque pars AB, BD aequae videretur clara, inuenique fuisse DE trium pedum parisinorum, CE siue altitudinem centri flammae 8 digitorum. Candelae erat sebacea, dedique operam, ut ad sensum aequalis esset eius claritas, flamma erecta atque conica, filumque probe emunctum. Altitudo siue axis flammae erat 18 lin. atque diameter coni maxima 3 lin. Hi numeri ex pluribus sunt fere medii. Semidiameter lunae $= 0^{\circ}, 33\frac{1}{4}'$.

§. 1076. Erat itaque

$$CE:DE = 2:9 = 0,22222$$

$$\text{ang. CDE} = 12^{\circ}, 32'$$

$$LAF = 63, 0$$

Superficies flammae hic instar trianguli isocelis erit, cuius area $= 27$ lin. quadr. quae si in circulum mutetur, erit eius semidiameter $2,3'''$ adeoque semidiameter adparens in D visa erit angulus, cuius tangens

$$= (2,3):DC = \frac{23}{4425} = 0,0051977$$

unde semidiameter ipsa $= 0^{\circ}, 17', 53''$

§. 1077. Sit iam claritas lunae plenae $= L$, candelae $= C$, erit illuminatio plani AB $= L.(\sin 16\frac{5}{8}')^2.(\sin 63^{\circ}).$

illuminatio plani BD

$$= C.(\sin 17', 53'')^2.(\sin 12^{\circ}, 32')$$

At vero utraque haec claritas est aequalis, quare erit

$$\frac{L}{C} = \frac{(\sin 17', 53'')^2.(\sin 12^{\circ}, 32')}{(\sin 16', 37'')^2.(\sin 63^{\circ})}$$

$$L:C = 1:3,545$$

Hh

Ac

At lumen lunae per athmosphaeram debilitatur fere in ratione 5 : 3, quare ratio inter claritatem lunae plenae & candelae erit

$$\frac{3}{5} L : C = 1 : 3,545$$

siue

$$L : C = 1 : 2,127$$

Quare lumen candelae sebaceae duplo clarius est lumine lunae plenae. Utraque haec claritas est claritas visa, at vero hoc intercedit discrimen. Claritas lunae simpliciter pendet ab eius superficie, quippe ab ista lumen solare reflectitur. Contra ea flamma candelae est mediocriter diaphana, quare non modo ab eius superficie verum & ex partibus interioribus lumen emittitur, atque hanc ob causam lumen superficiei notabiliter augetur.

§. 1078. Quodsi numero rotundiore assumamus lumen solis esse 500000 vices intensius lumine lunae plenae, quod haud ita multum a vero aberrabit (§. 10072. 1048.) intensitas luminis solaris intensitatem luminis candelae sebaceae 250000 vices excedet.

CAPVT II.

Computatur lumen, quo spectandos se sistunt Planetae primarii.

§. 1079. Quae in superiori capite de lumine planetarum eiusque modificationibus generalius adnotauimus, ea iam singulis haud difficulter adplicabuntur, simulac singulorum albedo aut statuatur eadem, aut ceu data assumatur. Ita vero rem peragemus, ut prius assumendo, numeros exhibeamus tales, qui

qui in veram claritatem abibunt, si ii, qui ad eundem planetam spectant, per eius albedinem multiplicentur, si unquam haec ad liquidum perducatur.

§. 1080. Superfluam esse investigationem illuminationis telluris singulis planetis debitam, vel inde patet, quod illuminatio cunctis iunctim debita sit paruitatis contemnendae. Unde paruitatem istam vel unico exemplo ob oculos posuisse sufficiet. Contra ea in peruestiganda eorum claritate visa eo uberiores erimus, quippe si unum Saturnum excipias, ceteri omnes lumine micant lumine stellarum fixarum haud inferiori.

§. 1081. Utique alia est claritas planetarum visa, si nudo oculo eos intuearis, ac est si oculus armetur tubo astronomico. Priori casu claritas planetae non modo pendet ab apertura pupillae, verum & eo minor erit, quo magis oculus fuerit myops (§. 1038.) Contra ea posteriori casu, cum singulae partes planetae distinctius videantur, atque arceatur lumen quod a particulis aeris inflexione aliasque ob causas dispergitur, atque insuper tubus ipse cuique oculo adcommodetur, anomalia ista ab oculo pendens fere evanescit, ut adeo si singuli planetae eodem tubo spectentur, claritas eorum haud secus calculo definietur, ac in capite praecedenti claritatem lunae visam definiuimus.

§. 1082. Ab hoc ergo computo ut ordiamur, idem quod supra (§. 1051.) notabimus claritatem planetae visam hoc casu ab eorum distantia esse independentem. Contra ea vel

maxime pendet a distantia heliocentrica atque a situ telluris, quatenus planetae potissimum inferiores phasibus sese spectandos sistunt lunaribus analogis.

§. 1083. Densitas luminis solaris, quod normaliter in superficies planetarum incidit, est reciproce ut quadratum distantiae (§. 115. 117.) huicque proportionalis est eorum claritas centralis, cum in oppositione versantur.

§. 1084. Porro eodem hoc casu, quo nempe planetae pleno orbe lucent, claritas totius disci media est $\frac{2}{3}$ claritatis centralis (§. 1048.) atque claritas media ceterarum phasium visa in eadem ratione decrescit qua numeri tabellae §. 1050. Definita itaque claritate centrali planetae in oppositione constituti, facili computo dabitur claritas media cuiusvis phaseos, cum illa simpliciter per numerum istius tabellae huic phasi respondentem multiplicanda sit.

§. 1085. Sit ergo claritas telluris centralis hoc sensu sumta $= 1$, siue eius claritas media $= \frac{2}{3}$, sumtis planetarum distantis maximis, mediis atque minimis ex *Tabulis Labireanis*, haud difficulter concinnabitur tabella sequens

Plane- tæ	Claritas in oppositione versantis centralis visa		
	maxima	media	minima
♄	0,0120	0,0110	0,0099
♅	0,0408	0,0370	0,0334
♆	0,5234	0,4307	0,3608
♇	1,0134	1,0000	0,9672
♈	1,9396	1,9113	1,8856
♉	10,5760	6,6735	4,5560

§. 1086. Quodsi ergo numeri huius tabellæ per numeros tabellæ §. 1050. multiplicentur, habebitur claritas phaseos planetæ media, si phasin spectes, maxima, media & minima si spectes distantias heliocentricas.

§. 1087. Planetæ inferiores haud secus ac Fig. 96. luna omnes phases terricolis spectandas exhibent. Sit S sol, T tellus, PCQ planeta inferior. Nectantur centra S, T, C rectis ST, TC, CS, atque agantur normales QP, KL, erit QNP superficies planetæ illuminata, quam hemisphaerium esse ponemus, etsi aliquanto maior sit. KML erit hemisphaerium telluri obuersum, unde phasis e tellure spectanda erit KNP, & M centrum disci adparentis, PL pars deficiens. At vero ob arcus $QN = NP = KM = ML = 90^\circ$, erit $PL = MN$, $PCL = SCT$ & $KCP = CST + STC$. Sed arcus KNP est ille ipse quem supra (§. 1047.) vocauimus $= v$, unde erit

$$v = CST + STC = 180^\circ - SCT$$

sive summa elongationis planetæ a sole geocentricæ & planetæ a tellure heliocentricæ.

Hh 3

Porro

Porro dicta semidiametro solis e planeta visa adparente $=s$, albedine planetae media $=A$, claritate phaseos media $=\eta$, erit (§. cit.)

$$\eta = \frac{4(\sin v - v \cdot \cos v) A \sin s^2}{4\pi(1 - \cos v)}$$

§. 1088. Contra ea planetae superiores haud omnes phases nobis sistunt spectandas. Sit enim tellus C, planeta superior T, eodem modo demonstrabitur, angulum STC esse partem phaseos deficientem. At vero hic angulus, cum vel maximus est, pro Marte gradus 50, pro Ioue gr. 12, pro Saturno gradus $6\frac{1}{2}$ nunquam excedit. Quare unum Martem notabiliter gibbum videre terricolis datum est, Iupiter & Saturnus fere pleno orbe constanter lucere videntur.

§. 1089. Hinc nec notabiliter decrescit claritas phaseos cum vel maxime deficit. Etenim manente distantia planetae a sole, ratio inter claritatem phaseos plenae & maxime deficientis erit pro

$$\S = 1 : 0,998.$$

$$\J = 1 : 0,990.$$

Contra ea pro

$$\S = 1 : 0,862.$$

§. 1090. Pendet vero phasis ista maxime deficiens ab angulo STC, qui quidem facile reperiretur, si uterque planeta incederet in circulo concentrico. Foret enim TC tangens circuli C, adeoque SC:ST sinus anguli STC, cum maximus est. At haec secus se habent, cum planetae moueantur in ellipsis positione & magnitudine haud uno respectu diuersis.

Unde

Unde intricatiſſima euadit ſolutio problema-
tis, quo inuenienda eſt planetae inferioris e ſuperiori
ſpectati elongatio a ſole omnium maxima ſive angulus
 STC maximus. Solutionem hanc ab aliis per-
actam vel tentatam nondum vidi, quare etſi
ipſe eam ad finem non perduxerim, dicam,
quae ſeſe mihi in ea rimanda obtulerunt.

§. 1091. Sit S ſol, CTB orbita planetae ſu-
perioris, DVA orbita planetae inferioris. Ille Fig. 97.
ſit in T , hic vero in V , cum angulus STV eſt
maximus. Ducta recta TV per centra utrius-
que planetae, facile patet hanc debere eſſe
tangentem curvae DVA , puncto V respon-
dentem.

§. 1092. Moueatur planeta T per ſpatio-
lum orbitae infinite paruum Tt , ducantur ra-
dii vectores ST , St , SV , atque tangens tV .
Cum iam angulus STV debeat eſſe maximus,
eius differentiale erit $= 0$, quare uterque an-
gulus STV , StV erit aequalis. Quodſi ergo
recta SV ducta concipiatur per punctum in-
terſectionis utriusque tangentis TV , tV , qua-
tuor iſta puncta S , t , T , V erunt in peripheria circuli.
Etenim anguli aequales StV , STV eidem re-
ctae SV inſiſtunt. Porro cum puncta T , t iti-
dem ſint in orbita planetae, ſibiſque infinite
vicina, circulus iſte orbitam planetae in T tanget,
adeoque tangens NM & orbitae & circulo iſti erit
communis, ſimiliterque centrum circuli erit in normali
 TK .

§. 1093. Sit iſte circulus $SKVT$, diameter
 TK , ducantur rectae SK , VK , anguli TSK ,
 TVK erunt recti, adeoque ſi ad radium vecto-
rem ST & tangentem TV agantur normales SK , VK ,

punctum concursus *K* erit in normali *TK*, unde diameter circuli *TK* definitur intersectione utriusque normalis *TK*, *VK*.

§. 1094. Porro cum *NM* & orbitam & circulum in *T* tangat, erit

$$STN = SVT$$

$$VTM = TVS$$

Quare radii vectores *ST*, *SV* orbitae suae sub eodem angulo insistant, estque *STN* elongatio planetae *T* a sole e planeta *V* visa, & *VTM* elongatio utriusque planetae e sole visa.

§. 1095. Haftenus dicta obtinent, quaecunque sint planetarum orbitae, & quicumque fuerit earum situs. Quodsi vero iam ponamus eas esse ellipses, atque solem esse in foco communi, specialiora superuenient anguli *STV* maximi symptomata.

§. 1096. Sit axis orbitae maioris *CB*, focus alter *F*, axis orbitae minoris *AD*, focus alter *E*. Ducantur rectae *FT*, *VEL*, atque per naturam ellipseos erit

$$STK = KTF$$

$$SVK = KVL$$

At cum quatuor puncta *S*, *K*, *V*, *T* sint in peripheria circuli, erit $STK = SVK$ adeoque &

$$KTF = KVL$$

unde punctum intersectionis *L* erit in eodem circulo, & ob $STK = KFL$, & *TK* diametrum, triangulum *STL* erit isocèle, unde

$$TS = TL$$

$$\text{ang. } TSL = SLT = SVT = STN = LTM$$

hinc

$$LVT = SVT - TSV = LSV.$$

§. 1097.

§. 1097. *Assumpto ergo loco vel puncto T, ducantur rectæ TS, TF in utrumque focus S, F, fiat TL=TS, atque ex L agatur recta LEV per focus alterum orbitæ minoris E, eritque V locus planetæ inferioris, atque verus erit, si ducta TV orbitam in V tangat.*

§. 1098. Sit iam

	orbitæ CTB	DVA
axis maior	CB=a	DA=α
axis minor	=c	=γ
distantia focorum	SF=b	SE=ε
radius vector	ST=x	SV=ξ
angulus	STF=SVE=v	
angulus	SVI=STN=φ	
angulus maximus	STV=ω	
erit per naturam ellipseos		

$$4\sin\varphi^2 = 4\cos^2\frac{1}{2}v = 2(1 + \cos v) = \frac{cc}{ax - xx} = \frac{\gamma\gamma}{\alpha\xi - \xi\xi}$$

$$\sin\varphi = \frac{c}{2\sqrt{(ax - xx)}} = \frac{\gamma}{2\sqrt{(\alpha\xi - \xi\xi)}}$$

$$\sin\omega = \xi \cdot \sin\varphi : x = \frac{c\xi}{2x\sqrt{(ax - xx)}}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha\alpha - \gamma\gamma \cdot \operatorname{cosec}\varphi^2)}$$

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(aa - cc \cdot \operatorname{cosec}\varphi^2)}$$

$$x : \sin\varphi = \xi : \sin\omega = TK$$

$$c^2 : (ax - xx) = \gamma^2 : (\alpha\xi - \xi\xi)$$

$$\sin\omega = \frac{(\alpha\sin\varphi + \sqrt{(\alpha^2\sin\varphi^2 - \gamma\gamma)}) \cdot \sin\varphi}{a \cdot \sin\varphi + \sqrt{(a^2\sin\varphi^2 - cc)}}$$

§. 1099. Ex ultima hac aequatione dabitur angulus ω absolute maximus, atque inde definietur, qualis esse debeat utriusque orbitæ situs siue angulus FSE, quo vere obtineat. At

H h §

facile

facile praevidetur calculum haud parum futurum fore complexum.

§. 1100. Assumpto angulo $SVT = \phi$, dantur latera ST , SV , & anguli TSF , VSA , cumque porro detur declinatio axium siue angulus FSA , atque sit

$$FSA + ASV = FST - TSV$$

hinc peruenietur ad aequationem, qua per axes ellipsium & angulum FSA definietur angulus SVT . At nisi breuius inueniri possit, hac certe ratione vix a quoquam inuenietur.

§. 1001. Cum anguli STN , SVT sint aequales, patet si alteruter fuerit rectus, & alterum rectum esse debere. Unde si punctum V fuerit in aphelio, T debet esse in perihelio. Quod idem locum habebit si planetarum alteruter moueatur in circulo, cuius centrum cum centro solis coincidit.

§. 1102. Claritatem planetarum nudo oculo visam aliter definiendam esse iam supra (§. 1038. 1081.) breuibus indicauimus, cum haud distincta sit eorum imago in retina oculi depicta, atque hoc ipso longe sit auctior. Acutissime diuersitatem istam perscrutauit cel. *IVRINVS* in *Essay upon distinct and indistinct vision* Systemati Optices cel. *SMITHII* adnexo, cuius epitome & in suum Systema opticum transtulit cel. *KAESTNER*. Unde ea tantum hic mutuabimus, quae ad rem nostram faciunt, cetera quoque superaddituri, quae cel. Auctoris acumini sese subduxisse videntur.

Fig. 98. §. 1103. Circulus AB referat imaginem planetae vel obiecti quae in retina depingere-
tur, si visio esset distincta. At cum confusa
sit

fit visio in spatio AB non erunt apices conorum
luminosorum, verummodo eorum axes. Po-
namus ergo radios, qui in punctum C coinci-
dere deberent, in retina ita esse dispersos, ut
repleant spatium circuli FG. Hoc ergo spa-
tium debetur puncto C, quod est ipsius cen-
trum, atque facile patet pro quouis alio pun-
cto spatii AB simile spatium concipiendum
esse, quod spatio circulari FG est æquale, sed
eccentricum.

§. 1104. Sit punctum B in peripheria ima-
ginis distinctæ radii, qui in B coincidere de-
berent dispergentur in spatio circuli ILDM.
Per puncta I & D ducantur circuli DE, IH
imagini distinctæ AB concentrici, atque erit
circulus exterior HI spatium in quod sese dif-
fundunt radii omnes qui in AB coincidere de-
berent. Circulus interior DE a radiis disper-
sis æque illuminabitur, cum in quodvis eius
punctum Q radii ex singulis punctis imaginis
distinctæ AB incidant. Contra ea spatium
annulare HLEK, cuius diameter interior DE,
exterior HI, inæqualiter illuminatur, cum
plures radii incidant in partes centro vicini-
ores. Quodsi enim v. gr. puncto P circumscri-
batur circulus MRSKN, cuius radius = CG,
quantitas radiorum in P incidentium erit ut
spatium lentiforme RSA, adeoque eo maior,
quo punctum P fuerit centro C vicinius.

§. 1105. Sit semidiameter imaginis distinctæ
CB = s, semidiameter dispersionis CG = σ, erit se-
midiameter imaginis confusæ æque illuminatæ
CE = σ - s, latitudo penumbrae EI = 2s. Porro
voce-

vocetur claritas imaginis distinctae $=\eta$, claritas confusae aequae illuminatae $=\kappa$.

§. 1006. Spatium circulare DE aequae illuminatur ac si omnes circuli dispersionis MRN, LIK, FLG essent concentrici, quare cum claritas sit reciproce ut spatia, erit

$$\eta:\kappa=\sigma^2:s^2$$

$$\kappa=\frac{\eta.s^2}{\sigma^2}$$

§. 1107. Semidiameter σ eadem ratione mutatur, qua mutatur apertura pupillae. Quodsi ergo haec ponatur constans, ut noctu esse solet, cum caelum intuemur, *claritas imaginis confusae erit in ratione composita ex claritate imaginis distinctae eiusque area, adeoque simpliciter in ratione quantitatis radiorum in oculum irruentium.*

§. 1108. Positio haec invariata manet, etsi pupilla statuatur variabilis, cum eadem ratione augeatur claritas imaginis distinctae η & area circuli dispersionis. Quare *claritas imaginis confusae constanter erit in ratione areae imaginis distinctae adeoque simpliciter in ratione illuminationis plani planetae vel obiecto normaliter obuersi.*

§. 1109. Probe tamen notandum est, haec obtinere, ubi semidiameter dispersionis CG semidiametrum CB pluries excedit. Quodsi enim ipsi esset aequalis, spatium DE plane evanesceret, adeoque tota imago foret veluti penumbra, a centro C ad extremitatem usque decrescens.

§. 1110. Similiter si ponamus imaginem distinctam esse FLGK, atque circulum dispersionis notabiliter minorem tantummodo esse ARB,

ARB, hoc casu, qui priori oppositus est, foret itidem circulus DE spatium imaginis aequaliter illuminatae, at eius area ab apertura pupillae perparum penderet. Cum vero semidiametri planetarum admodum sint parui, positiones istae (§. 1006. seqq.) absque notabili errore admitti poterunt.

§. 1111. Ponit vero cel. IVRINVS semidiametros CBeasdem quae distincte videntur, atque proinde rectas CB, CG, CE, EG effert in minutis & secundis graduum circuli, quod utique facere licet, cum rectae istae angulis respondentibus sint proportionales. Porro medium quoddam sumendo statuit semidiametrum dispersionis $CG = 2' = 120''$, adeoque $FG = 2\sigma = 240''$. Hinc assumendo diametros planetarum adparentes, distincte visas, facili computo quaerit diametros imaginis confusae DE, HI, atque facit pro

4	$AB = 38''$	$DE = 202''$	$HI = 278''$
♂	$- - = 6$	$- - = 234$	$- - = 246$
♀	$- - = 18$	$- - = 222$	$- - = 258$

§. 1112. Similiter pro stellis fixis ponit $AB = 0$, cum earum semidiameter fere sit infinite parua, neque tubis astronomicis adhuc dum observari possit. Hinc vero infert esse $EG = GI = AB = 0$, adeoque $DE = 240''$. Unde earum diametrum nudo oculo visam aequalem ponit diametro dispersionis. Quae quidem positio utique a vero vel nihil aberrat. At ea assumpta, alia inde necessario fuit, *diametrum dispersionis esse variabilem, idque independenter ab apertura pupillae*. Hanc ergo positionem una cum con-
sectariis iam fusius exponemus.

§. 1113.

§. 1113. *Stellas fixas diuersae esse magnitudinis adparentis, etsi nudo oculo spectentur, ita constat, ut hanc ipsam ob causam iam ab antiquissimis astronomis in sex aut septem classes distributae sint. Porro easdem instar puncti videri, si oculus armetur tubo astronomico, recentioribus observationibus haud minus constat. Similiter magnitudinem adparentem earum magnitudini planetarum parum esse inferiorem, si nudo oculo videantur, palam fit, si reputes, criteriis opus esse, quibus planetae a fixis dignoscantur.*

§. 1114. *Magnitudinem Martis adparentem, & oculo iudice admodum esse variabilem, ita in vulgus notum est, ut, cum in perihelio versatur simulque oppositioni est proximus, adeo videatur volumine auctus, qui a pluribus cometis vel stellis novis accenseatur, ipsosque rei astronomicae peritos in admirationem rapiat.*

§. 1115. *At vero haec omnia secus se haberent, si unica adesset visionis confusae causa, cui calculum suum superstruxit acutissimus IVRINVS. Sit enim AFP oculus, PF eius axis, AD diameter pupillae. In hanc incidant radii e puncto infinite remoto CA, ED, isti in F cum axe coinciderent, si visio esset distincta. At cum oculus nimis sit myops, coincident in E, ibique adeo erit apex coni luminosi, atque ex hoc puncto radii iterum divergunt, inciduntque in spatium retinae circulare, cuius diameter est ϕf , eritque*

$$\phi f = \frac{FE \cdot AD}{PE}$$

Hoc

Hoc ergo respectu crescit diameter dispersionis ϕf directe ut diameter aperturæ pupillæ AD, & axis conî diuergentiæ EF, reciproce ut axis conî conuergentiæ PE.

§. 1116. Dum stellas easque solas intuemur, pupilla maxime est aperta, atque utique parum mutabitur siue maiores siue minores stellas intueamur. Simili modo idem quoque est situs apicis E. Etsi enim retinae F propius admoueatur, cum obiectum quoddam enixius intuemur, attamen disparitas hæc omnino cessat, cum intuemur stellas diuersæ magnitudinis, at sibi proximas, quales sunt *Alcor* & *media caudæ* in *Ursa maiori*, quas ipse IVRINVS aliam ob causam exempli ergo adfert. *Alcor* inter stellas quintæ magnitudinis, *media caudæ* inter eas quæ sunt secundæ refertur. At vero spatium imaginis confusæ $f\phi$ pro utraque deberet esse æquale, cum oculus, si aperturam pupillæ spectes & situm apicis E, eodem plane modo adficiatur, adeoque radii utriusque huius sideris in idem spatium ϕf incidant, atque in toto isto spatio si extremitatem limbi excipias, æque disseminentur.

§. 1117. Distinguendum itaque esse videtur spatium imaginis ϕf quatenus a radiis collustratur, ab eo spatio, quatenus sensibilitas sese exserit. Illam *imaginem depictam* vel *illuminatam*, hanc vero *imaginem sensibilem* vocabimus. Utriusque differentiam sequentem in modum stabiliemus.

§. 1118. Ponamus utramque pro *Alcore* coincidere, eamque esse ϕf , utraque quoque coincidere deberet pro *media caudæ*, atque fo-

ret $\equiv \phi f$, si diuergentia radiorum unica esset causa visionis confusae. At vero cum *Media* ista vel quintuplo maior videatur, maior quoque erit eius imago sensibilis, ac est imago depicta. Quodsi ergo eius diametrum ponamus $\equiv g\gamma$, sensibilitas sese utrinque extendet ex ϕ in g & ex f in γ . Unde eadem differentia & pro *Alcore* obtinebit.

§. 1119. Triplicem vero accedere causam inueni, quae vel utramque imaginem vel sensibilem solam augere valent. Prima est impelluciditas aeris. Eo enim maiores videntur stellae, quo magis aer est nebulosus, quoque densioribus onustus est vaporibus. Haec causa utramque imaginem auget.

§. 1120. Secunda est cumulatio motus tremuli neruorum vel fibrillarum in fundo oculi iam supra descripta (§. 833. 834.) Haud enim ita infixis oculis obiectum intuemur, quin extremitas axis radiorum F continuo aliis retinae punctis insistat. Quo ipso imago depicta $f\phi$ mobilis est, situmque mutat. Ponamus eam vagari per spatium $g\gamma$, totum hoc spatium imaginem sensibilem constituet. Admodum enim celeris est ista translatio axeos PF , unde per eandem rationem, quam supra (§. cit.) experientia firmam esse vidimus, sensibilitas & in iis partibus spatii $g\gamma$ aderit, a quibus radii luminis $f\phi$ recesserunt. Facile vero patet hanc ob causam spatium imaginis sensibilis eo magis auctum iri, quo densius est lumen in imagine depicta disseminatum. Pendet enim diameter γg a tempore, quo imago depicta ad extremitatem limbi g , γ reuertitur. Hoc

vero

vero tempus pendet a vi luminis, quo retina feritur (§. 833.)

§. 1121. Tertia causa est eadem cumulatio motus tremuli, atque haec locum haberet, etsi oculos obiecto ita infigere possemus, ut immota esset imago depicta. Etenim cumulatione ista fit, ut & illae fibrillae quae imagini depictae contiguae sunt, ad motum ciantur. Eo plures vero in motum concitari, quo densius est lumen in imaginem depictam incidens, atque motum istum extremitatem versus debiliorem esse, vel me tacente intelligitur.

§. 1122. Utraque haec causa pendet ab apertura pupillae. Quo enim haec minor fuerit, eo debilius est lumen in retina disseminatum, unde eo quoque minor est & cumulatio & communicatio motus tremuli.

§. 1123. Notandum tamen, & hic tres istos casus esse distinguendos, quos supra exposuimus (§. 1109. 1110.) Quodsi enim diameter adparens obiecti, veluti planetarum admodum fuerit exigua, claritas imaginis depictae ab apertura pupillae fere non pendet, etsi notabiliter minuatur eius area. Unde area imaginis sensibilis minuetur, non ob imminutam densitatem luminis, quippe quae eadem manet, sed ob imminutam aream imaginis depictae. Contra ea si admodum notabilis fuerit semidiameter obiecti, veluti cum lunam plenam intuemur, opposita erit horum ratio. Parum enim hoc casu ab apertura pupillae pendet area imaginis depictae, at maxime variatur luminis densitas. Unde imminuta pu-

pillae apertura decrescet penumbra imaginis depictae eiusque claritas, & duplicem hanc ob causam minuetur area imaginis sensibilis.

§. 1124. Porro utraque haec causa (§. 1120. 1121.) adest, siue confusa sit visio siue distincta, immo posteriori casu quandoque notabilius sese exferit. Cum enim eadem radiorum quantitas in imaginem incidat, densiores erunt, ubi imago fuerit distincta, quia minor est eius area. Quare maior aderit cumulatio & communicatio motus tremuli fibrillarum. Circulus albus, cui circumscriptus est annulus niger, maior videtur circulo nigro, quem cingit annulus albus, etsi utriusque diameter sit aequalis. Maior insuper erit differentia, quo clariori lumini exponantur. Similiter & in vulgus notum est, furis crassioribus videri eundem hominem, cum tibialia alba induit, quam vero cum nigris utitur.

§. 1125. Cum stellae fixae, quae minores sunt fixis sextae vel septimae magnitudinis telescopicae sint, siue nudis oculis sese subducant, imago earum insensibilis est, quare cumulatio luminis una cum fixis sextae magnitudinis fere evanescit. Quodsi ergo diametrum imaginis depictae, quippe quae sola remanet, ponamus esse tertiam vel quartam partem diametri imaginis sensibilis stellae primae magnitudinis, atque hanc cum cel. IVRINO assumamus $= 240''$, diameter dispersionis ad summum erit $= 60''$ siue $= 1'$, unde mobilitas axeos radiorum & cumulatio motus tremuli imaginem sensibilem fixae primae magnitudinis sedecies redderet maiorem.

§. 1126.

§. 1126. Claritas planetarum nudo oculo visa est in ratione quantitatis luminis in oculum irruentis atque per aream imaginis sensibilis diuisae. Quodsi aperturam pupillae ponamus constantem, quantitas ista erit simpliciter ut illuminatio normalis, adeoque decre-
scet

- 1°. reciproce ut quadratum distantiae planetae a sole, siue directe ut quadratum sinus semidiametri solaris e planeta visae, quare ut numeri tabellae §. 1085.
- 2°. directe ut quadratum sinus semidiametri planetae adparentis e tellure visae.
- 3°. in ratione claritatis centralis planetae in oppositione versantis ad claritatem phaseos mediam, adeoque ut numeri tabellae §. 1050.
- 4°. in ratione areae disci adparentis integri ad aream phaseos adparentem.
- 5°. denique in ratione albedinis planetae mediae.

§. 1127. Haec ergo ratione dabitur illuminatio planetae in omni situ debita. Quaeramus v. gr. quamnam rationem inter se seruent planetae superiores, cum in oppositione simulque in distantia a tellure & a sole media versantur, sitque (§. 1085.) pro

claritas centralis				diam. adparens			
♄	-	0,0110	-	-	-	-	18"
♃	-	0,0370	-	-	-	-	46
♂	-	0,4307	-	-	-	-	30

atque illuminatio erit ut factum ex claritate centrali in quadratum diametri adparentis, adeoque ut numeri sequentes.

$$\text{♄} \quad - \quad - \quad - \quad 3,56$$

$$\text{♂} \quad - \quad - \quad - \quad 78,19$$

$$\text{♂} \quad - \quad - \quad - \quad 387,63$$

siue fere ut 1; 22; 108.

§. 1128. Similiter pro Venere & Mercurio, cum dichotomi videntur, erit

claritas centralis diameter adparens

$$\text{♀} \quad - \quad 1,9113 \quad - \quad - \quad - \quad 30''$$

$$\text{♀} \quad - \quad 6,6735 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 9$$

Unde si claritas centralis ducatur in quadratum diametri atque factum minuatur in ratione 6666:4244 (§. 1050.) illuminatio erit ut numeri sequentes

$$\text{♀} \quad - \quad - \quad - \quad 1095,06.$$

$$\text{♀} \quad - \quad - \quad - \quad 344,11.$$

Ut adeo illuminatio planetis superioribus in oppositione, & inferioribus dichotomis debita sit ut numeri

$$\text{♄} \quad - \quad - \quad - \quad 1.$$

$$\text{♂} \quad - \quad - \quad - \quad 22.$$

$$\text{♂} \quad - \quad - \quad - \quad 108.$$

$$\text{♀} \quad - \quad - \quad - \quad 307.$$

$$\text{♀} \quad - \quad - \quad - \quad 97.$$

§. 1129. Hi numeri adhuc pendent ab albedine cuiusvis planetae, adeoque a vero haud ita multum aberunt, si istam proxime eandem esse statuere liceat. Quo assumpto exhibebunt rationem inter claritatem imaginis depictae (§. 1108. 1117.) & quantitatem radiorum per aperturam pupillae in retinam incidentium, atque

atque in veram claritatem planetae nudo oculo visam abibunt, si per aream imaginis sensibilis cuiusvis planetae diuidantur.

§. 1130. Cum haec area pro quouis planeta sit diuersa, facile patet, eorum claritatem nudo oculo visam non esse in ratione horum numerorum, verum magis ad aequalitatem accedent. Ponamus v. gr. diametros planetarum adparentes esse eas, quas dederunt antiquiores Astronomi, ex systemate TYCHONIS BRAHAEI pro casu praesenti erit

	diameter orbitae	diameter planetae vera	diameter adparens	claritas
♄	$9\frac{3}{4}$	$\frac{8}{15}$	2'	1
♅	$3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	6	$2\frac{1}{4}$
♆	$1\frac{2}{3}$	$\frac{4}{25}$	$4\frac{1}{2}$	23
♁	1	1	32	
♂	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{15}$	5	50
♀	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{80}$	$2\frac{2}{3}$	54

§. 1131. Etsi vero hae claritates ab aequalitate minus distent, quam illuminatio, nequaquam tamen ad veram accedunt. Minuenda videtur diameter adparens Iouis & Veneris, quo utriusque claritas augeatur. At cum in hisce vix quicquam statui possit, quod certius sit, rem alio modo tentabimus.

§. 1132. Eum planetam clariorem esse, qui citissime e radiis solaribus emergit, tuto assumitur. Crescit ergo eius claritas, decrescente arcu visionis. Quodsi iam arcus istos assumamus, quales eos dederunt PTOLOMAEVS,

KEPLERVS, RICCIOLVS, planetae, si claritatem adparentem spectes, hunc seruabunt ordinem

Planeta	arcus visionis
♀	5°, 0'.
♂	10, 0.
♂	10, 0.
♂	11, 0.
♂	11, 30.

§. 1133. Eundem fere hunc ordinem seruant ratione illuminationis. Hoc enim casu fere in coniunctione versantur, singulique sunt sole remotiores. Unde erit

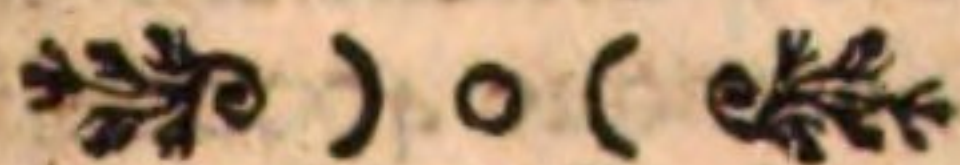
	illuminatio	diameter adparens
♀	77	12''
♂	67	6
♂	15	31
♂	1	15
♂	7	6

§. 1134. Unus hunc ordinem turbat Saturnus, quippe qui postremus esse deberet. Dandum aliquid est diametro adparenti, & rubicundo colori Martis, quippe qui vel hanc ob causam obscurior videtur Jove, cum uterque telluri est proximus. Ceterum probe notandum, arcum visionis diuersis anni diebus necessario diuersum esse debere, etsi constitutio atmosphaerae vel maxime ponatur eadem. Utique enim pendet ab elongatione planetae a sole. Quod sequentem in modum palam fit.

Fig. 100. §. 1135. Sit HVFN meridianus, HPF horizon, APQ aequator. Ponamus iam planetam orientem esse in $\odot$ in P, situs ecclipticae erit DPB, cum in D sit $\odot$ & in B $\odot$. Sit
iam

iam sol in S, atque per S demittatur circulus verticalis VSN, erit SG arcus visionis, SP elongatio planetæ a sole. At iam in G claritas horizontis maxima est, atque utrinque decrescit versus H & F. Eo igitur tardius conspicuus erit planeta, quo minor fuerit arcus arimuthalis GP, unde eo maior debet esse solis infra horizontem depressio, siue arcus visionis GS.

§. 1136. Sit iam planeta oriens in OV, in P, situs ecclipticæ erit CPE. Ponamus solem esse in s, atque demisso verticali VgsN, erit gs arcus visionis, Ps elongatio planetæ a sole, & gP arcus azimuthalis. Quodsi ergo uterque arcus visionis gs, GS esset æqualis, foret $gP > GP$. Unde cum hoc casu planeta esset in loco horizontis obscuriori, nil impediret, quo minus vespere citius mane tardius videretur, adeoque debebit esse $gs > GS$. Unde planeta oriente arcus visionis mensibus vernalibus maior, autumnalibus minor erit. Opposita erit ratio, si p anetam occiduum spectes. Hoc enim casu arcus visionis crescet æstate decrescet hieme. Quæ vero hinc pro arcu isto curatius definiendo, simulque pro claritate planetarum nudo oculo visa deduci, atque observationibus stabiliri possunt, ea his relinquo, qui observationibus astronomicis data opera incumbunt.



CAPVT III.

De lumine Fixarum earumque distantia.

§. 1137. Immensam fixarum distantiam coniecturis potius quam solidioribus ratiociniis ad mensuram notam reuocari posse, eamque continuo maiorem reperiri, quo probabiliore sint argumentationes, abunde constat. Antiquiores Astronomi eam vix tantam credere ausi sunt, quanta nunc fere constat esse distantia solis. COPERNICVS eam indefinitam relinquit. KEPLERVS ipsi tribuit 60000000 semidiametros telluris, easque adeo ponit fere 3000 vicibus remotiores sole. RICCIOLVS, assumpta parallaxi fixarum annua $= 10''$, & radio orbis magni, qualem eum ponit WENDELINVS, $= 144656$ semid. terrestrium, fixarum distantiam maximam ex iis, quas ex variis variorum Astronomorum hypothesebus deduxit, ponit esse $= 604589312$ semid. telluris, siue 30000 radiis orbis magni. Sirii distantiam fere eandem siue $= 27664$ semid. orbis magni ingeniosissime inuenit cel. HVYGENIVS. At cum singulae istae distantiae parallaxin annuam nimiam quantam exigerent, quam uno minuto secundo minorem esse statuit cel. BRADLEIVS, exactissimis illis observationibus innixus, quibus aberrationem luminis detexit atque curatissime definiuit, distantiam fixarum longe maiorem esse, eamque 400000 semidiametris orbis magni haud esse posse inferiorem, assertum iuit.

§. 1138.

§. 1138. Lumen, quod noctu diffundit caelum stellatum, definire adgressus est, in tractatu, quem de cometa anni 1744. scripsit, cel. de CHESEAVX, atque simul coniectando assequi studuit, qua ratione debilitetur fixarum lumen, dum aetherem percurrit. Ponit vero, non modo distantias fixarum esse inaequales, verum numerum earum, quae aequae a sole distant, in eadem ratione augeri quo augetur ipsa distantia. Unde cum huic distantiae nullos ponat limites, infert, caelum noctu ita confutum videri debere stellis, ut ne punctum remaneret, quod non a fixa quadam obtegeretur, nisi admodum debilitaretur fixarum lumen.

§. 1139. At vero etsi inaequalem fixarum distantiam nemo temere neget, haud tamen concedendum videtur eas ea ratione esse in uniuerso disseminatas, quae ingeniosissimo huic Auctori arridet. Unde enim *Galaxia*? Mea quidem sententia Systema fixarum, quod se nobis spectandum sistit, haud sphaericum sed orbiculare & planum est, atque viam lacteam fixarum veluti Ecclipticam esse pono. Neque enim quendam adfirmatum ire confido, immensum istum stellarum numerum, quem in hoc caeli tractu teloscopiis videmus, ita in isto esse collocatum, ut cunctae stellae quas continet, una sint & minimae, si volumen spectes, & sibi admodum vicinae, si earum a sole nostro distantiam fere aequalem, siue ut rectius loquar, haud infinite diuersam esse ponas.

§. 1140. Porro etsi cunctas istas fixas, quas intueri mortalibus datum est in unum systema complectamur, haud tamen istud erit simplex, sed ex infinitis minoribus compositum. Cunctae istae stellae, quae extra Galaxiam sitae sunt, & maiores, quae in ipso hoc tractu lucent, ad illud systema pertinent, quod solem nostrum comprehendit. Cetera systemata, quae nostro sunt propiora, in ipsa galaxia disseminata sunt. Inaequaliter vero ea disseminata esse vel inde consequitur, quod galaxiae figura admodum est irregularis, atque ista hinc inde dehiscens atque bifariam secta videatur. Solem nostrum non esse in centro sui systematis, inde colligo, quod circulus per mediam galaxiam ductus non est maximus.

§. 1141. Quodsi ergo hac ratione fixas in uniuerso spectabili collocatas atque distributas esse ponamus, quod certe a vero haud ita multum aberrabit, debilitatio, quam patitur lumen fixarum, priusquam ad nos pertingit, velut infinite minor erit ea, quam statuit *cel. de CHESEAVX*, immo eam pro fixis vicinioribus fere insensibilem statuere licet, quippe & eiusmodi fixas adhuc videmus, quae vel centies millies remotiores sunt.

§. 1142. Porro quod vel oculis patet, fixae & intensitate & colore inter se differunt, earumque splendor ab earum magnitudine vera non pendet, etsi adparens utique inde pendeat, cum ob cumulationem luminis in retina oculi maiores videri debeant illae, quae splendidiores sunt, etsi eadem esse ponatur earum distantia & magnitudo. Dantur fixae, quae
prae

prae ceteris *lucidae* vocantur, etsi vix tertiae videantur esse magnitudinis. Hae forsan ad sextam vel inferiorem adhuc dignitatem deprimerentur, si minus essent luminosae. Ob diuersum colorem diuersum ipsis influxum tribuerunt Astrologi.

§. 1143. Ob infinitam hanc diuersitatem statuere licet, dari fixas, quae soli nostro & claritate & magnitudine sunt aequales. Porro fixas primi ordinis eadem fere claritate gaudere videntur, qua gaudent planetae, si unum Hesperum excipias, & oculis nudis patet, & ex arcu visionis, quem 12 gr. esse ponit PTOLOMAEVUS, haud difficulter colligitur. Idem quoque valere de magnitudine adparente ex obseruationibus antiquiorum Astronomorum pateret, nisi vel simplici obtutu euidens esset. Hi enim diametros stellarum nudo oculo aestimarunt.

§. 1144. Quae cum ita sint, distantias fixarum, certe proximarum sequenti ratiocinio coniectabimus. Ex Capite praecedente patet, definitum iri claritatem visam, si illuminatio per aream imaginis sensibilis diuidatur. Assumemus ergo fixam, quae soli nostro sit similis, si claritatem veram, planetae vero, si claritatem & magnitudinem visam spectes. His positis eadem erit area imaginis sensibilis, eademque luminis quantitas in oculum irruentis, unde eadem quoque erit illuminatio.

§. 1145. Sit iam fixae semidiameter adparens $= s$, eius claritas vera & claritas vera solis sit $= 1$, semidiameter adparens planetae $= \sigma$, semidiameter solis & planeta visa $= S$,
albedo .

albedo planetae $= A$, erit claritas planetae in oppositione versantis centralis distincte visa vel vera $= A \sin S^2$, claritas disci media $= \frac{2}{3} A \sin S^2$, illuminatio hinc nascens $= \frac{2}{3} A \sin S^2 \sin \sigma^2$. At illuminatio fixae debita erit $= \sin s^2$. Quare cum utraque sit aequalis, habebitur

$$\sin s^2 = \frac{2}{3} A \sin S^2 \sin \sigma^2.$$

Cui aequationi, si nonnisi semidiametrum s quaeras sequentem substituere licet,

$$s^2 = \frac{2}{3} A \sigma^2 \sin S^2.$$

siue

$$s = \sigma \sin S \sqrt{\frac{2}{3} A}$$

§. 1146. Sit iam semidiameter solis e tellure visa media $= 16'$, semidiameter orbis magni $= 1$, distantia planetae heliocentrica $= a$, atque erit proxime

$$\sin S = \sin 16' : a.$$

adeoque

$$\begin{aligned} \sin s &= \sqrt{\left(\frac{2A}{3}\right)} \sin \sigma \sin 16' : a \\ s &= \frac{\sigma \sin 16' \sqrt{2A}}{a \sqrt{3}} \end{aligned}$$

§. 1147. Quodsi iam ponamus Fixae magnitudinem veram eandem esse, quae est magnitudo solis, sit eius distantia $= x$, atque erit

$$\sin s : \sin 16' = 1 : x$$

adeoque

$$x = a : \left(\sin \sigma \sqrt{\frac{2A}{3}} \right)$$

§. 1148. Assumtis iam albedine planetarum $A = \frac{1}{9}$ quippe quae vix maior est (§. 1072.) distantiis planetarum a sole mediis, eorumque diametris adparentibus, cum sunt in coniunctione

Etione & oppositione, & cum inferiores dichotomi videntur, sequens hinc conficitur tabella (§. 1127. 1128. 1133.)

	semid. ad- parens	distantia Fixae	diameter Fi- xae adparens
Planeta in coniunctione			
♄	15''	425100	0''', 16'''''
♃	31	112100	1 , 1
♂	6	169700	0 , 41
♀	12	40290	2 , 51
♁	6	43020	2 , 41
in oppositione			
♄	18	354200	0 , 19
♃	46	75570	1 , 32
♂	30	33950	3 , 24
Dichotomus			
♀	30	22790	5 , 9
♁	9	28900	3 , 52

§. 1149. Ex his distantiiis, quae minima est fere ad eam excrescit quam ex ingeniosissimo suo experimento deduxit cel. HUYGENIVS (§. 1137.) At vero hanc nimis parvam esse iam supra diximus, cum ea admissa parallaxis annua nimia quanta inde emergeret. Quodsi observationes consulas, planetae omnes, uno forsan Saturno excepto, fixis primae magnitudinis videntur esse vel clariores vel maiores. Utrumque euidenter constat de Ioue & Venere. Mercurius Fixis longe videtur clarior, & Mars in oppositione haerens eas magnitudi-

dine adparente superat. Hoc ipso vero remouenda est Fixa, quo euadat obscurior. Porro albedo Martis albedine ceterorum planetarum longe videtur esse inferior. Cum vero in hoc computo singulae albedines assumtae sint aequales, facile patet hac ratione augendam esse distantiam Fixae ipsi Marti comparatam.

§. 1150. Unus itaque est Saturnus, cui respondeat Fixae distantia ea, quae ad verum magis accedat. Etenim arcus visionis ipsi respondens arcui visionis Fixarum primae dignitatis fere deprehenditur aequalis, quippe a PTOLOMAEO ille ponitur $= 11^\circ$, hic vero $= 12^\circ$. Quare distantia Fixae $= 425100$ semid. orbitae telluris debito potius minor quam maior est. Quod cum exactissimis observationibus cel. BRADLEII plane coincidit (§. 1137.)

§. 1151. Magnitudo Fixarum nudis oculis visa non modo ab earum magnitudine & distantia verum vel maxime ab earum splendore pendet. Quo enim intensius est Fixae cuiusdam lumen, eo maior erit area imaginis sensibilis in retina oculi, quippe quae eadem fere ratione crescit, qua augetur illuminatio Fixae debita. Haud ergo absolum est, si statuas, inter fixas, quae vel sextae sunt dignitatis, dari quasdam, quae nobis aequae sunt vicinae, ac eae, quibus primum tribuimus honorem. Contra ea quaedam ex his longe possunt esse remotiores, ut adeo a magnitudine adparente ad distantiam Fixarum vix valeat consequentia, quae uniuersalis sit.

§. 1152.

§. 1152. Quodsi tamen ponamus distantiam fixae proximae esse $= 500000$, eamque soli nostro & magnitudine & splendore esse aequalem, illuminatio inde nascens erit ad illuminationem, quae soli debetur ut 1 ad 250000000000. Cumque supra vidimus illuminationem hanc, quae soli debetur esse ad eam, quae a luna plena proficiscitur, ut 50000 ad 1, consequens hinc erit, lumen, quod fixa ista in tellurem diffundit 500000 vicibus debilius esse eo, quod plenae lunae debemus. Ut adeo 500000 Fixae primi ordinis noctem vix aeque illuminarent, ac a luna plena illuminatur.



PHOTOMETRIAE

PARS VII.

QVA EXPONVNTVR

MODIFICATIONES ET GRADVS
LUMINIS HETEROGENEI ET RELATIVI
SIVE

COLORVM ET VMBRAE.

CAPVT I.

Experimentis & calculo peruestigatur colorum claritas eorumque differentia.

§. 1153.

Quo in peruestiganda colorum diuersitate atque claritate breuioribus esse liceat, cuncta ista experimenta hic praesupponemus ceu notissima, quibus summus NEWTONVS recondidiorem eorum indolem in apricum produxit (§. 17.) Unde, cum ea ita sint euidentia, quae cuique facile sese probent, iis instar principiorum utemur, hoc tamen discrimine, ut quatenus in explicandis colorum phaenomenis atque modificationibus inter se dissentiant NEWTONVS atque EVLERVS, quantum in nobis situm est, a neutra parte stemus, verum & in his leges Photometriae experientiae innixas tradamus. En ergo medium, quod in ardua hac re tenere propositum est.

§. 1154.

§. 1154. Primo radiorum ideam retinebimus eam, quam in superioribus (§. 43. seqq.) euolutam dedimus, unde & hic eorum *intensitatem* ab eorundem *quantitate* distinguemus, cum in computanda claritate colorum utraque seorsim spectanda veniat.

§. 1155. Porro disquirendum est, quatenus radii diuersi coloris sint heterogenei, & quatenus, si claritatem spectes, comparationem vel admittant vel respuant. Quem in finem ex experimentis iamiam laudatis sequentes hic adponemus positiones, ab omnibus facile concessas.

§. 1156. Radios luminis albi haud simplices esse, verum ex infinitis aliis constare, qui diuersi sunt coloris, diuersaque gaudent reflexibilitate & refringibilitate iam vel in vulgus notum est. Qualemcunque porro assumas hypothesein, hinc absque difficultate deduces, diuersam quoque esse eorum celeritatem. Hoc vero cum a pluribus vel negetur vel in dubium vocetur, exempli ergo ex utraque ista hypothesei deducam, cui Physici hodiernum tantum non omnes fauere videntur.

§. 1157. Prima sit compositio virium, quam in theoria refractionis admittunt qui NEWTONO calculum adiiciunt. Radius AC incidat in superficiem medii densioris DB, atque refractus pergat secundum CE. Sit celeritas incidentis CA, vis inde exsurgens resoluatur in normalem AB & parallelam CB, haec non mutatur, unde fiat $DC = CB$. Cum vero lumen refractum ad perpendiculum accedat, eius vis augetur. Sit ergo haec DE, atque
K k ducta

Fig.
101.

ducta CE, erit CE celeritas, qua lumen in medio densiore procedit. Ponamus iam lumen AC esse album, radii, quibus constat in C diuidentur, atque diuergent. Ponamus porro extremos rubrorum pergere secundum CF, violaceorum secundum CE, celeritas rubrorum in medio rariore erit ad eorundem celeritatem in medio densiori ut AC ad CF. Contra ea pro violaceis eadem ratio erit ut AC ad CE. Utraque vero haec ratio utique est diuersa, quare diuersa quoque est celeritas radiorum diuersi coloris.

§. 1158. Ponamus celeritatem $CA = c$, angulum incidentiae $ACB = \omega$, erit vis normalis $= c^2 \cdot \sin \omega^2$, huic iam cum refringitur accedat augmentum $= v$, ut sit $= c^2 \sin \omega^2 + v^2 = DE^2$. Quodsi iam addatur vis parallela $DC^2 = CB^2 = c^2 \cdot \cos \omega^2$, erit vis, qua lumen pergit secundum rectam CE,

$= CE^2 = c^2 \sin \omega^2 + v^2 + c^2 \cos \omega^2 = c^2 + v^2$
adeoque

$$AC^2 : CE^2 = c^2 : (c^2 + v^2)$$

Sed CE : CA est ratio inter sinus anguli inclinationis & refractionis, quae si dicatur $= m:n$, erit

$$n^2 : m^2 = c^2 : (c^2 + v^2)$$

unde

$$c = nv : \sqrt{(m^2 - n^2)} = AC$$

$$v = \frac{c}{n} \cdot \sqrt{(m^2 - n^2)} = \sqrt{(EC^2 - CA^2)}$$

$$\sqrt{(c^2 + v^2)} = \frac{mc}{n} = CE$$

At

At iam vis lumen deflectens pro quouis colore est eadem, contra ea ratio $m:n$ variabilis est, unde & celeritas radiorum diversi coloris ex hac hypothese prodit diuersa. Sit v. gr. medium rarius aer, densius vitrum, erit pro radiis rubris $m:n=77:50$

violaceis $m:n=78:50$

adeoque pro radiis

rubris $c=0,854.v - \sqrt{c^2+v^2}=1,315.v.$

violaceis $c=0,835.v - \sqrt{c^2+v^2}=1,303.v.$

Maior itaque & in aere & in vitro est celeritas radiorum rubrorum, ac est celeritas violaceorum, etsi posteriori casu utraque magis ad aequalitatem accedat.

§. 1159. In hoc computo animum abstraximus a diuerso globulorum volumine, cum in hac hypothese statuendum videatur, vim eam, quae lumen deprimit, haud secus ac vim grauitatis, singulos globulos aequaliter deflectere, siue maiores siue minores sint. Porro notandum, hanc globulorum diuersitatem cum assumpto eorum motu locali non necessario connexam esse, ut adeo etsi hic admittatur, illa negari possit. Quodsi tamen eam concedamus, inde quoque sequetur, globulorum celeritatem diuersam esse debere, cum ii, qui maiores sunt lentius euibrentur.

§. 1160. Eadem celeritatis diuersitas haud minus deducitur ex hypothese cel. EVLERI, hoc tamen discrimine ut medio densiori tribuenda sit ea, quae ex hypothese NEWTONI medio rariori tribuitur. Generaliter enim statuunt celeritatem esse in ratione sinuum in-

clinationis & refractionis, an vero sit in ratione directa aut reciproca, hoc est, in quo dissentiant.

§. 1161. Quicquid tamen horum sit, concedendum erit, differentiam inter celeritatem radiorum diuersi coloris esse admodum paruum, ut ex sola hac differentia vix ac ne vix heterogenea colorum indoles maximaque ista diuersitas deduci possit, quae oculis adeo manifesto patet. Huius vero diuersitatis ratio utique felicius explicatur ex systemate cel. EVLERI, qui eam diuersis tonis, quibus delectatur sensuum primariorum alter, aurem intelligo, analogam esse statuit.

§. 1162. Porro colores prismatici eo ordine sibi inuicem succedunt, ut ii, qui sunt proxime vicini, velut infinite parum differant. Etsi ergo in septem classes diuidantur, attamen ii, qui ad eandem classem pertinent haud perfecte sunt homogenei, etsi differentia eo minor sit, quo propiores sibi inuicem fuerint.

§. 1163. Similiter constat ex radiis diuersi coloris, si in eodem spatio albo coincidunt, oriri colorem, qui medium inter utrosque permixtos tenet, huncque v. gr. viridem esse, si flauo & caeruleo permisceantur, citrinum, si rubri & flauo, purpureum si rubri & violacei coincidunt. At singuli isti radii hoc modo conflati prisma iterum separantur, cum singulis diuersa sit refringibilitas.

§. 1164. Eodem vero modo, si coincidunt extremi eorum, qui ad eandem classem referuntur, eos iterum separare poteris, quippe & in his diuersa adest refractionis.

§. 1165.

§. 1165. Colores corporum naturalium haud esse simplices cum ope prismatis separari possint, abunde constat, dudumque hinc collegerunt, eorum superficies haud omnes radios reflectere. Quod idem hic assumemus, etsi causa phaenomeni adhuc plane lateat.

§. 1166. Porro ex singulis experimentis, quibus exploratur illuminatio corporum, facile deducitur, lumen ab iis reflexum simpliciter esse in ratione luminis incidentis, atque hanc positionem singulis radiis diuersi coloris independentem a ceteris adplicabilem esse. Hinc est, ut corpus album constanter referat colorem luminis, a quo collustratur, coloratum vero naturalem retineat colorem, si luminis albo exponatur, eundem vero mutet, si lumen incidens haud fuerit album. (§. 764. 718.)

§. 1167. Ut ergo pro quouis colore composito definita requiritur radiorum reflexorum diuersaeque coloris quantitas, ita facile obuium est, hanc non modo a situ partium corporis opaci earumque indole, verum & a lumine incidente pendere, quippe alius se spectandum sistet color, siue hoc siue illam immutaueris. Quinam vero ex definita compositione radiorum simplicium oriturus sit color compositus difficilius ex theoria luminis deducetur, unde hactenus experimentis definiendus est, atque ex his petendae sunt compositionis istius regulae uniuersaliores.

§. 1168. Porro quaestio, hic ventilanda haud ultima haec est: *Quatenus claritates diuersorum colorum inter se comparari possint, siue ad iudi-*

cium oculi siue ad principia uniuersaliora recurras?
Supra enim (§. 309.) diuersitatem coloris inter ea obstacula retulimus, quae comparationi claritatis, vel maxime obsunt, eamque difficiliorem atque incertiolem reddere valent, mediumque descripsimus quo difficultati isti obuiam ire licet iis saltem casibus, quibus coloris diuersitas minus est notabilis.

§. 1169. Eodem fere medio uti licebit, si uterque color notabilius fuerit diuersus, at incertius euadet oculi iudicium.

§. 1170. Si vero colores aequae clari videntur, a quibus eodem modo afficitur oculus, eademque vi percutiuntur fibrillae. Hanc ergo vim, independentem a coloris diuersitate aequalem deprehendere debet oculus, si uterque color aequae clarus fuerit. Cumque porro sensatio ista pendeat a cumulatione motus tremuli (§. 1120.) facile patet, eam maiorem fore, quo celerius pulsus luminis sibi inuicem subsequuntur, quo densius fuerit lumen incidens, quoque maior fuerit eius celeritas. Successiuos enim esse istos pulsus concedendum est, siue motum luminis ponas esse localem siue eum undulatorium esse statuas.

§. 1171. Triplicem hanc causam ita constare in duas licet, ut vis, quae cuilibet radio debetur, a densitate radiorum distinguatur, quo facto, claritas coloris est functio composita ex vi cuiusuis radii & densitate radiorum eadem vi pollentium.

§. 1172. Hac ergo ratione colorum claritates inuicem conferri utique poterunt; At difficilior est determinatio ista virium & densitatis

fitatis quorumvis radiorum, ex quibus color compositus est. Quare ad experimenta data opera hunc in finem instituenda recurrendum. Quid ad rem faciant XXVIII, XXVIII & XXX, suo loco breuibus indicauimus (§. 759. seqq.) atque infra uberius explicabimus. Iam vero sequens adponemus

EXPERIMENTVM XXXV.

§. 1173. Chartae nigrae imposui albam crassiores ita ut illa proemineret neque ab hac plane obtegeretur. Iuxta eam collocaui ceram vel laccam ruberrimam, quam ad ob- signandas literas adhibent, ita ut lumen in eam eadem copia & densitate incideret, ac in charta. Cumque hanc per prisma vitreum illam vero nudo oculo intuerer, vidi limbum chartae albae colore rubro superbientem, quo vero cum colore cerae nudo oculo viso, comparato, vix ullum rubedinis discrimen deprehendere valui. Eum vero quaesiui prismatis situm, qui imaginem chartae maxime eleuaret vel maxime deprimeret.

§. 1174. Cum ergo charta alba radios rubros eadem fere quantitate reflecteret, ac cera, qua usus sum, consequens est albedinem chartae rubedini cerae fere fuisse aequalem. Maior enim illa esse debuit, cum quaedam radiorum pars ab utraque prismatis superficie reflecteretur, atque in ipso vitro dispergeretur. Inita vero computatione, albedinem quarta circiter parte maiorem fuisse collegi.

§. 1175. Simili experimento color violaceus cum albedine chartae comparari poterit.

Quodsi vero limbus chartae violaceus colore adhibito videatur clarior, sumenda erit charta lumen minori copia reflectens, aut immutanda erit eius a candela distantia, quod & eo casu faciendum erit, quo limbus chartae obscurior est.

§. 1176. At vero pro coloribus prismatis intermediis experimentum minus succedit, cum isti haud ita separentur a ceteris, ac uterque extremus. Quare uniuersalius erit sequens

EXPERIMENTVM XXXVI.

Fig. 102. §. 1177. In pariete vel valuis fenestrae camerae probe obscuratae fiant duo foramina A, B, hisque opponatur in C planum album, in D planum coloratum, v. gr. viride, utrumque a sole aequae collustretur, atque lumen per foramen contiguum in cameram proiciat. Hoc lumen in E excipiatur lente caustica, atque pone hanc collocetur prisma FG, ita ut radii a lente refracti, ope prismatis separentur, atque in HI excipi possit imago oblonga utriusque foraminis A, B, siue radiorum quos utrumque planum C, D in lentem proiicit. Quo facto in H, videbuntur singuli colores prismatici ab inuicem separati, & in I ii, qui virides sunt ceteris videbuntur densiores. Quodsi iam color viridis in utraque imagine oblonga fuerit aequae clarus, hinc inferre licebit, colorem istum ab utroque plano C, D aequae reflecti, sin minus, immutandus erit alterutrius plani situs, quo immutetur angulus incidentiae, usque dum uterque color viridis H, I videatur

deatur aequalis, atque hoc casu albedo plani C erit ad virescentiam plani D in ratione reciproca sinuum incidentiae.

§. 1178. Experimentum hoc variis modis immutari poterit. Sic v. gr. adhibere licet duas lentes, quarum altera excipiat lumen foraminis A, altera vero lumen foraminis B. Quo facto aperturæ lentium pro lubitu immutari poterunt. Porro intendi poterit utriusque plani C, D claritas, si radii solares in ea incidentes ope lentis causticæ colligantur, quo densiores incidant.

§. 1179. Cum itaque triplici modo immutari possit utriusque imaginis oblongae claritas, dabitur hinc modus definiendi quantitatem radiorum cuiuscunque coloris a quolibet pigmento reflexorum. Etsi enim planum D sit viride, attamen in K videbitur tenue lumen rubrum, cuius ergo claritas cum claritate imaginis rubrae in L comparari poterit. Radii solares in D incidentes colligantur lente caustica, atque apertura lentis, qua excipitur lumen foraminis B, sit maxima. Contra ea radii solares in C incidant nulla interposita lente, & si opus fuerit minuatur angulus incidentiae & apertura lentis, qua excipitur lumen foraminis A, usque dum utraque imago rubra sit aequè clara, quo facto, per theoremata supra demonstrata dabitur ratio inter densitatem radiorum rubrorum a plano albo C & viridi D reflexorum. Idem eodem modo procedere, si color plani D fuerit quicunque, & comparandae sint imaginis oblongae H, I partes

tes quaecunque, me non monente quilibet intelligit.

§. 1180. Computus vero, qui hic instruendus est, hoc modo absoluetur. Ponamus planum C esse eo sensu perfecte album, ut lumen in ea ratione reflectat, quae ad constituendam veram albedinem requiritur. Quo posito densitas radiorum cuiusvis coloris, quos reflectit, per unitatem efferetur, atque per has unitates definientur densitates radiorum cuiusvis coloris a pigmento D reflexorum. Ponamus v. gr. densitatem radiorum rubrorum esse $=r$. Quodsi iam lumen solare normaliter incidens sit $=1$, sinus anguli incidentiae in C $=s$, in D $=S$, atque porro lumen in D condensetur lente caustica, per theoremata XXIII. seqq. & formulas §. 539. seqq. dabitur ratio, in qua aucta est claritas plani D, quam ponemus esse $=1:m$. Erit ergo claritas plani albi C, quae radiis rubris debetur $=s$, eadem claritas plani albi D radiis itidem rubris debita $=mSr$. Quodsi iam ponamus utramque lentem in E eadem gaudere distantia focali, eundemque esse pro utraque prismatis situm, claritates s , mSr nonnisi ab apertura lentium alterabuntur. Dicta ergo apertura lentis foramini D respondentis $=A$, apertura lentis alterius $=a$, atque erit claritas imaginis rubrae K $=AmrS$, imaginis rubrae L $=as$. Sed in experimento utraque fit aequalis, quare erit

$$AmrS = as$$

adeoque

$$1:r = AmS : as$$

Unde

Unde fluit

THEOREMA LI.

§. 1181. *Densitas radiorum dati coloris a plano albo C reflexorum est ad densitatem radiorum eiusdem coloris a plano pigmentato D reflexorum, ut factum ex densitate luminis, quo collustratur pigmentum D in aream aperturæ lentis, qua excipitur eius imago, ad factum ex densitate luminis, quo collustratur planum album C in aream aperturæ lentis, qua excipitur eius imago.*

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$1:r = AmS : as$$

Sed mS , & s sunt densitates luminis in D & C incidentis, A & a areae aperturæ lentium quae ipsis respondent; unde constat propositum. Ceterum conditiones theorematis iam explicatae sunt §. 1180.

§. 1182. Quodsi inaequales essent lentes adhibitae, claritas imaginis ipsis debitae computanda esset per theoremata XXIII. seqq. Similiter si diuersus esset earum situs ratione prismatis FG , radii in latera prismatis incidentes diuersa quoque ratione reflecterentur, atque definienda esset ista ratio per ea quae in P. II. C. I. & II. docuimus. Praestat ergo & lentes esse aequales, & eundem esse prismatis situm, qui commodissimus erit si utraque imago oblonga H , I fuerit in puncto regressus, siue quod idem est in maxima eleuatione vel in maxima depressione.

§. 1183. Quodsi ad illuminanda plana C , D adhibeantur specula plana parieti vel valuis adfi-

adfigenda, danda est opera, ut lumen solare sub eodem angulo in ista incidat. Quodsi secus fuerit, computanda erit diuersa luminis reflexi quantitas eo modo, quo P. III. C. I. §. 677. seqq. usi sumus. Prius tamen praestat, atque facillime obtinetur, quippe hoc unum requiritur, ut specula sibi inuicem sint parallela.

§. 1184. Si plura huiuscemodi sumantur experimenta, conuenit planum album C pro modulo assumere, eoque constanter uti. Hac enim ratione densitates luminis cuiusuis coloris a pigmento quocunque reflexi ad unam candemque unitatem reuocabuntur.

§. 1185. Ex quo de hoc experimento cogitavi, istud instituendi defuit oportunitas, unde cautelas, quas ipsa experientia suggessisset, hic adnectere nequeo. Cameram esse debere obscurissimam, vitrum prismatis purissimum, foramina A, B probe perforata, ne lumen spurium accedat, lentis, qua condensatur lumen in D, impelluciditatem definiendam, eiusque habendam esse rationem, idem experimentum mutatis circumstantiis esse pluries instaurandum, quo ex singulis sumi possit medium, experimentum voto magis fore satisfacturum, si solis altitudo fuerit notabilior, ipseque sol in meridie versetur, haec omnia vel per se obuia sunt. Lumen candelaе huic experimento instituendo non sufficere, cum nimis debilis sit illuminatio ipsi debita, experientia edoctus sum.

§. 1186. Hunc defectum, quem inuitus admitto, ut quodammodo compensarem, experi-

perimentum XXXV. sequentem in modum institui, quo densitatem radiorum rubrorum, a variis pigmentis reflexorum quodammodo definirem.

EXPERIMENTVM XXXVII.

§. 1187. Prope candelam AC horizontaliter posui planum nigerrimum EF, eique in F imposui chartam albissimam cuius longitudo GH trium fere digitorum latitudo 6 linearum. Similem chartam, sed pigmento collitam collocaui in IK, ita ut longitudo utriusque esset in directione rectae IH. Quo facto utramque chartam per prisma ipsi IH parallelum, intuens, quaesivi loca E, F, quibus utriusque chartae limbus ruber aequè videretur clarus. Quibus inuentis atque notatis, dimensus sum rectas AE, AF, AB, DC, inuenique fuisse proxime pro

Fig.
103.

charta collita	AB	CD	AE	AF
aere viridi	1	1	1	3½
ochra	1	1	2	3
minio	1	$\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{2}$
zinnabari	1	1	1	$1\frac{1}{2}$

ochra, qua tincta erat charta flaua illud est pigmentum, quod Königsgeib vocant.

§. 1188. Ut in hoc experimento aestimatio aequalitatis inter utramque claritatem admodum difficilis fuit, ita & mensura rectarum tantummodo obiter peracta est, unde ratio inter densitatem radiorum rubrorum proxime dabitur hoc modo. Angulos incidentiae sumsi medios BEA, BFA, itidemque medios angulos
emana-

emanationis EBA, FBA, & distantias medias BE, BF, unde cum illuminatio sit directe ut sinus incidentiae, sinus emanationis, & rubedo chartae, reciproce ut quadratum distantiae, dicta rubedine chartae albae $F = 1$, chartae pigmentatae $E = r$, erit ob illuminationem aequalem

$$\frac{rAB.AE}{BE^4} = \frac{AB.AF}{BF^4}$$

$$r = \frac{AF.BE^4}{AE.BF^4}$$

Unde calculo subducto habetur rubedo

chartae albae	$\frac{1}{10}$
viridis	$\frac{1}{15}$
flavae	$\frac{1}{20}$
minio collitae	$\frac{1}{25}$
zinnabari collitae	$\frac{1}{30}$

Chartae caerulco montano, Bergblau, collitae rubedo vix fuit $\frac{1}{20}$. Porro instaurando experimentum XXVI. inueni chartarum istarum albedinem siue valores literae A (§. 759.) sequentes. Pro charta

alba	$A = 0,154. (§. 752.)$
viridi	$= 0,115. (§. 758.)$
flaua	$= 0,390.$
minio collita	$= 0,293. (§. 756.)$
zinnabari collita	$= 0,336.$
caerulea	$= 0,137.$

§. 1189. Chartam albam viridem & minio pigmentatam adhibui easdem, quibus supra usus sum (§. cit.) flauam, rubram & caeruleam adiunxi, quod ex *Notis literariis Goettigenfibus* superioris anni vidi Cel. T. MAYERVM
iisdem

iisdem pigmentis usum esse, pro definienda pigmentorum multifaria miscela, colorumque inde ortorum gradibus eis, quos oculos adhuc ab inuicem discernere valet. Easdem iam chartas adhibebo in experimentis sequentibus, quibus ostendam, qua ratione colores a pigmentis reflexi inuicem misceri possint, & quinam inde proditurus sit color compositus.

EXPERIMENTVM XXXVIII.

§ 1190. Experimentum IX. (§. 332.) ita Fig. 33. instauravi, ut tabulae ABCD imponerem chartam pigmento collitam, atque in vicem rectae IK substituerem chartam alio pigmento tinctam, cuius latitudo erat fere 2 vel 3 lin. longitudo 2 aut 3 digitorum. Quo facto haud secus ac in experimento citato in LQ, LP vidi imaginem utriusque partis chartae IL, LK, illam per refractionem hanc vero per reflexionem. At, quod facile praevideri potest, neutra pars colore naturali erat conspicua, cum color utriusque pigmenti alio alioque modo misceretur, prout mutabatur situs oculi O. Sequentes vero obseruaui miscelas.

1°. Adhibita charta rubra & caerulea, imago colore mox rosaceo, mox purpureo, mox violaceo erat conspicua. Optime enim uterque color videbatur permixtus.

2°. Adhibita charta rubra & flaua, prodierunt colores imaginis varii citrini & minio similes, optime iterum permixti.

3°. Ad-

3°. Adhibita charta flava & caerulea, quod paradoxon videbitur, imago nullo modo viridem induit colorem, verum aut erat flava obscurior, aut cinerea obscurior, colorem murium, ferri & aeruginis spectandum sistens, aut caeruleo-purpurea videbatur.

4°. Adhibita charta viridi & flava, similique modo viridi & caerulea, color imaginis singulas species colorum viridum a flavo ad caeruleum usque exhibuit.

5°. Adhibita denique charta viridi & rubra, luridus tristisque emerfit imaginis color, veluti ex fusco & cinereo mixtus.

§. 1191 Notandum tamen chartam viridem subflavam esse, cum aeri viridi immixtum sit pigmentum flavum aut succus ex quadam herba, quo factum est, ut eius color a caeruleo magis differret, propiusque ad flavum accederet.

§. 1192. Experimentum iam descriptum cum fere absque ullo adparatu facillime institui possit, ipsi diutius non immorabor. Hoc unum adiungam ope tabellae §. 443. facile inveniri rationem inter lumen, quod in tabulam vitream sub quolibet angulo incidit, ab ea reflectitur atque transmittitur, adeoque hinc dari rationem inter radios, qui colorem imaginis ab utraque parte ingrediuntur, eiusque miscelam constituunt. Idem quoque obtinebitur sequentem in modum.

EXPERIMENTVM XXXIX.

§. 1193. Ad valvas fenestrae camerae ob-Fig. 104.
scurae adplicentur duae lentes aequales A, B.
His in D, E obuertantur duo plana pigmentata
diuersi coloris, ita ut utriusque imago in C co-
incidat, ibique plano albo excipi possit. Quo
facto, apertura utriusque lentis ad lubitum
augeri minuiue poterit, in C obseruabitur co-
lor ex miscela radiorum utriusque imaginis
nascens. Hoc experimento instituo inueni mi-
scelam istam prorsus esse similem illi, quam in
experimento praecedente descriptam dedi.

§. 1194. Quodsi in C substituatur charta
pigmento collita, vel plures adhibeantur len-
tes, facile patet, hac ratione detegi posse mi-
scelam radiorum a quouis pigmentis, data-
que ratione reflexorum.

EXPERIMENTVM XL.

§. 1195. Obturato foramine E, in D & C
collocaui chartas diuersi coloris, atque se-
quentes obseruaui imaginis C colores.

1°. Adhibita charta rubra & caerulea, ima-
go C fere videbatur nigra, instar ardesiae
subcaeruleae.

2°. Adhibita charta rubra & flaua, similiter
flaua & viridi, caerulea & viridi, similis
prodiit imaginis color, ac in experimento
XXXVIII.

3°. Charta caerulea & flaua viridem exhi-
bebant colorem fere luteum.

4°. Charta viridis & rubra colorem prorsus
luteum sistebant.

§. 1196. Facile iam ex dictis deducuntur varia instrumenta photometrica. Primum erit camera obscura portatilis, cui quotlibet lentes adplicari possunt, quo oculis subiiciatur color imaginum coincidentium variorum pigmentorum compositus. Lentium apertura si fiat variabilis, dabitur ratio inter quantitatem luminis, quod e quolibet obiecto camerae obscurae obuerso per aperturam intromittitur. Alterum erit Tabula, quam sistit Fig. XXXIII. cui si adplicetur quadrans nigro colore collitus vel imbutus, cuius centrum sit H, ibique adplicetur regula dioptris instructa, facile dabuntur anguli, sub quibus in tabulam vitream EFGH incidunt radii colorati IQ, MR, NQ, KR, imaginem mixtam constituentes.

§. 1197. Simili modo radii PO, QO reflexi & refracti in O lente caustica excipi poterunt, ut imago in camera obscura in plano albo vel pigmentato, quod ipsi obuertitur, depicta spectanda sit. At his fusius prosequendis non immorabimur, quippe facillime plura huiusmodi instrumenta quilibet sibi parabit.

§. 1198. Videamus iam, qua ratione claritas pigmentorum quorum alia ab aliis collustrantur, calculo prosequenda sit, atque primo quid in casu illuminationis absolutae obtineat. Experimentis haecenus prolatis manifestum est, pigmenta quaelibet singulos quidem colores, sed in diuersa sibiue propria ratione reflectere. Porro quod supra iam notauimus (§. 1170. seqq.) claritas pigmenti est functio composita ex vi cuiusuis radii & densitate radiorum eadem vi pollentium. Quare clari-
tatem

tatem istam per spatium cuiusdam curvae ita exhibebimus, ut de unitatibus constet, quibus in calculo utendum est.

§. 1199. Vim radiorum referant abscissae AP, ita ut AB sit minima, AC maxima. Quantitatem eorum qui eadem vi gaudent, referant ordinatae BD, PM, CS, atque facile patet spatium BDEC fore summam virium, adeoque claritatem, quae inde nascitur, quaque pigmentum spectabile est.

Fig.
105.

§. 1200. Ponamus iam ordinatas curvae DME referre quantitatem radiorum eam, quae ad constituendam albedinem perfectam requiritur, atque curva ista instar moduli erit, quo definietur claritas cuiusvis pigmenti.

§. 1201. Obiiciatur enim pigmentum quodcunque lumini perfecte albo, ut ab hoc absolute collustretur, atque ponamus ordinatas FNG referre quantitatem radiorum quorumvis a dato pigmenti spatio $\equiv$ reflexorum, erit spatium FNGCB summa virium, adeoque claritas pigmenti istius a lumine perfecte albo absolute collustrati.

§. 1202. Porto ratio inter ordinatas homologas utriusque curvae PM:PN erit eadem, quae est inter radios incidentes & reflexos, quaeque pro qualibet radiorum specie constans est.

§. 1203. Quodsi ergo pigmentum istud obvertatur lumini cuius claritatem referat curva HQI, atque claritas pigmenti absolute illuminati exhibebitur per curvam KRL, eritque

$$PM:PN = PQ:PR$$

L 1 2

Ut

Uti adeo datis tribus curvis DME, FNG, HQI, ope huius analogiae detur quarta, cuius spatium erit celeritas pigmenti a lumine HQI absolute illuminati.

§. 1204. Quodsi illuminatio haud fuerit absoluta, spatium totum BKLC minuendum erit in eadem ratione, in qua imminuta est ipsa illuminatio. Haec vero ratio per ea theoremata, quae in Parte I. & II. huius operis demonstrata dedimus, facile definietur.

§. 1205. Spatium curvae BDEC, quod claritatem luminis perfecte albi refert, hic nobis erit instar unitatis, ad quam reuocanda sunt spatia ceterarum curvarum, ut claritates, quas exhibent ad unam eandemque unitatem reducantur. Unitas vero ista vel necessario arbitraria est (§. 709. 779.) unde pro quolibet casu ad lubitum assumi poterit.

§. 1206. Porro utraque curva DME, FNG in unam conflabitur quoties tantum quaeratur ratio inter ordinatas PM:PN. Sit ista STV atque erit

$$PS = PN:PM$$

$$PR = PQ.PS$$

Denotabunt itaque ordinatae PS rationem inter radios cuiusvis speciei in datum pigmentum incidentes, ab eoque reflexos.

§. 1207. His ita praemissis, sequentes assumemus notiones in antecessum definiendas, quo in sequentibus brevioribus esse liceat.

1°. Abscissas $AP = x$ simpliciter *speciem radiorum* vocabimus, quippe diuersam eorum vim referunt, qua oculi retinam feriunt.

2°. Ad-

2°. Adplicatas PS curvae TSV vocabimus *vim pigmenti reflectentem*, quippe rationem inter species incidentes & reflexas denotant.

3°. Quodsi porro ordinatae PQ, PR, PS dicantur λ , p , v , spatia tota curvarum respondentium efferemus per $\int \lambda dx$, $\int p dx$, $\int v dx$, eritque ergo $\int \lambda dx$ *color luminis collustrantis*, $\int p dx$ *color pigmenti ab eo absolute collustrati*, $\int v dx$ *summa virium reflectentium pigmenti*.

§. 1207. Cum ergo sit (§. 1205.)

$$p = v\lambda$$

erit

$$\int p dx = \int v \lambda dx$$

Ut adeo color pigmenti detur per colorem luminis, a quo absolute collustratur, & vim reflectentem, quae pigmento propria est.

§. 1208. Hinc iam facile definietur valor Fig. 70.
literae A, quem in experimentis XXVIII. & seqq. adhibuimus, quemque in hoc capite definitum dare promissimus (§. 762.) Sint ergo in Fig. 70. omnia ut in §. 726. seqq. Utrumque planum G, FD sit eodem pigmento collitum. Summa virium reflectentium pigmenti vocetur $\int v dx$, color luminis L, quod itidem hic sphaericum esse ponemus, sit $= \int \lambda dx$. Ponamus iam pigmentum ab isto lumine absolute collustrari, facile patet eius colorem futurum fore $= \int v \lambda dx$. Similique modo si pigmentum FD a pigmento G absolute collustretur, erit color pigmenti FD $= \int v^2 \lambda dx$.

§. 1209. At vero in experimentis istis illuminatione haud fuit absoluta, quare colorum $\int v \lambda dx$, $\int v^2 \lambda dx$ claritas debite erit immutanda, quo habeatur color ille, qui fuit in punctis G, D, F. Dicta ergo impelluciditate lentis AB $= \kappa$ (§. 741.) erit color

$$\text{plani G} = \int v \lambda dx : GL^2$$

$$\text{plani D} = \int v \lambda dx : LD^2$$

$$\text{imaginis F} = \frac{\kappa \cdot \text{tang AFC}^2}{LG^2 \sec AGC^2} \cdot \int v^2 \lambda dx$$

At in experimento uterque color in D & F fuit aequae clarus, quare erit

$$\frac{\int v \lambda dx}{LD^2} = \frac{\kappa \cdot \text{tang AFC}^2}{LG^2 \sec AGC^2} \cdot \int v^2 \lambda dx.$$

Unde habetur

$$\frac{LG^2 \sec AGC^2}{LD^2 \cdot \kappa \cdot \text{tang AFC}^2} = \frac{\int v^2 \lambda dx}{\int v \lambda dx} = A (\S. 738.)$$

Est ergo A ratio inter colorem plani G a lumine L absolute collustrati & colorem plani FD a plano G absolute collustrati. Ut adeo, dicta quantitate radiorum ea ratione permixtorum, qua in F incidunt, $= 1$, quantitas eorum, qui a plano F refleſtuntur, erit $= A$, quomodocunque iam inuicem permixti ſint. (§. 762.)

Curatius tamen hanc positionem efferes, ſi in vicem quantitatis radiorum ſubſtituas ſummam virium, quippe haec illi non exacte eſt proportionalis (§. 1161.)

fig. 105. §. 1210. Quod ſi aſſumere liceat radios eiufdem coloris eadem vi gaudere, ſive ex ſumma virium ſumi poſſe mediam, curuae, quas ſiſtit figura CV, non erunt continuae, verum ſeptem tantum dabuntur abſciſſae totidem-

tidemque ordinatae ipsis respondentes. Quare hac ratione delabemur ad calculum quantitatum discretarum, quem sequentem in modum concinniores reddemus.

§. 1211. Quantitates radiorum rubrorum, Fig. 70.
citrinorum &c. quibus lumen L constat denotentur literis R, A, F, V, C, P, W , vires pigmentorum G, D reflectentes eodem ordine vocentur r, a, f, v, c, p, w , ut color luminis sit $\equiv R + A + F + V + C + P + W$, eritque color pigmenti G vel D absolute illuminati $\equiv rR + aA + fF + vV + cC + pP + wW$, qui dicatur $\equiv \eta$.

§. 1212. Ponamus simile pigmentum a pigmento G itidem absolute collustrari, erit color hinc nascens

$$\eta \equiv r^2 R + a^2 A + f^2 F + v^2 V + c^2 C + p^2 P + w^2 W.$$

Similiterque color pigmenti tertii a secundo hoc absolute collustrati erit

$$\eta \equiv r^3 R + a^3 A + f^3 F + v^3 V + c^3 C + p^3 P + w^3 W.$$

§. 1213. Quodsi eodem modo continuo collustretur pigmentum quartum a tertio, quintum a quarto &c. erit color pigmenti n ti

$$\eta \equiv r^n R + a^n A + f^n F + v^n V + c^n C + p^n P + w^n W.$$

Hanc formulam ad casus quosdam speciales ita adplicabimus, ut quae inde deducuntur facile ad casum praecedentem, quo colores istos per curvas exhibuimus, transferri possint.

§. 1214. Si pigmentum fuerit perfecte album, siue omnes radios in eadem ratione reflectat, in qua incidunt, hoc casu erit $r \equiv a \equiv f \equiv v \equiv c \equiv p \equiv w$, adeoque

$$\eta \equiv r^n (R + A + F + V + C + P + W.)$$

Quotcunque ergo fiant luminis reflexiones, pigmentum constanter spectandum erit colore ipsius luminis L, etsi continuo debilior euadat eius claritas, nisi pigmentum fuerit absolute album, quippe hoc casu est $r = a = f = \&c. = 1$.

§. 1215. Si ex rationibus $r, a, f \&c.$ quaedam fuerit ceteris notabiliter maior, pigmentum continuo magis ad eum colorem accedet, ad quem ista ratio est referenda, quo magis iterentur reflexiones. Crescunt

enim singuli termini formulae n^n (§. 1213.) ut potestates rationum $r, a, f \&c.$ numero reflexionum aequales, adeoque eo celerius, quo maiores fuerint istae rationes. Sic v. gr. si pigmentum fuerit zinnabaris, ratio r ceteras longe excedit, ut adeo in quarta aut quinta reflexione termini formulae (§. 1213.) primum sequentes fere euanescant. Manifesto hoc patuit institutis experimentis XXVIII. seqq. iisque similibus (§. 1188.) Quippe adhibitis chartis minio, aerugine cupri, zinnabari, succo baccarum rhamni collitis, imago F notabiliter ad colores simplices prismaticos accessit, etsi unica tantum facta fuerit reflexio.

§. 1216. Daretur ergo hinc methodus colorem pigmenti primum a ceteris, qui veluti accessorii sunt, ita separandi, ut tandem fere solus remaneret, si continua effici posset illuminatio ab absoluta parum recedens. Hoc vero nullo modo obtinere licuit.

§. 1217. Quodsi quodam casu fuerit $R = A = F = \&c.$ formula generalis abibit in equentem

$$n^n = R (r^n + a^n + f^n + v^n + c^n + p^n + w^n)$$

Ratio-

peruestigatur colorum claritas eorumque differentia. § 37

Rationes r, a, f, v &c. spectentur ceu radices aequationis septimi gradus

$$x^7 - \alpha x^6 + \beta x^5 - \gamma x^4 + \delta x^3 - \epsilon x^2 + \zeta x - \phi = 0$$

atque per formulas NEWTONIANAS erit

$$\eta = f x = \alpha$$

$$\eta'' = f x^2 = \alpha f x - 2\beta$$

$$\eta''' = f x^3 = \alpha f x^2 - \beta f x + 3\gamma$$

$$\eta^{iv} = \alpha f r^3 - \beta f r^2 + \gamma f r - 4\delta$$

$$\eta^v = \alpha f r^4 - \beta f r^3 + \gamma f r^2 - \delta f r + 5\epsilon$$

&c.

Quare si experimentis dentur colores $\eta, \eta, \eta,$

VII

&c. η , ope huius formulae facile dabuntur coefficientes aequationis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. atque inde elicientur radices ipsae, quae rationem inter colores incidentes & reflexos exhibent. At vero cum rationes istae experimento supra descripto (§. 1179. seqq.) commodius detegantur, huic methodo fusius exponendae non immorabimur. Alia experimenta huc facientia, cum principia, quibus nituntur, hic desint, in *Pyrometria* occurrent.

CAPVT II.

Calculo definiuntur modificationes umbrae eiusque gradus.

§. 1218. Corpora opaca lumen intercipere, iisque id effici, ut ea obiecta, quae a lumine directe collustrari possent, interposito corpore opaco, obscurescant, lumi-

L 1 5

neque

neque vel plane vel ex parte priuentur, experientia quotidiana docet. Priuatio ista luminis, si partialis fuerit *umbra* audit, si absolute totalis, *tenebrae* adesse dicuntur.

§. 1219. Vox umbrae mere est relatiua, atque ideam luminis inuoluit, a quo procedit, siue cuius priuationem constituit. Tot enim idem corpus umbras habere dicitur, quot fuerint lumina quorum radios intercipit. Porro *sensibilis* erit umbra, simulac locus obumbratus ita fuerit obscurior ut differentia claritatis inter locum istum & loca non obumbrata oculis percipi possit.

§. 1220. Quatenus corpus opacum omnes radios intercipit, umbra erit *totalis*, contra ea aderit *penumbra*, ubi nonnisi pars radiorum intercipitur. Utraque vero haec idea iterum ad unum idemque lumen seorsim refertur, & si ad morem loquendi communem attendas, lumen istud ceteris clarius, umbra atque penumbra sensibilis, atque praesentia luminis & corporis lumen intercipientis manifesta esse debet. Sola enim claritatis differentia independenter ab umbra adesse potest, cum obtineat, imminuto angulo incidentiae vel luminis distantia. Porro ita opponitur umbra tenebris, ut loca umbrosa non sint omni claritate prorsus destituta, absolutissimam vero hanc priuationem luminis tenebrae requirant. Etsi latiori sensu & illa loca tenebris obiecta dicantur, in quibus nulla obiecta percipere atque ab inuicem discernere valet oculus.

§. 1221. Ita quidem res se habet, si usum loquendi communem spectes, quippe qui ad
oculi

oculi iudicium cuncta refert. At in re optica & photometrica ratio audienda est. Quo fit ut strictioribus istae notiones circumscribantur limitibus, ut quid sibi velint, liquido constet. Hinc enim omnis priuatio luminis umbra dicetur, siue ista sit sensibilis, siue visui sese subducatur, atque tunc demum tenebrae adesse dicentur, ubi absolutissima fuerit luminis absentia, absolutissimaque priuatio.

§. 1222. Varii gradus claritatis vel obscuritatis umbrae & penumbrae pendent a lumine, quod in loca umbrosa aliunde incidit, siue id fiat directe, siue per reflexionem & refractionem. Hac ergo ratione theoria graduum umbrae uno velut actu ad theoriā illuminationis in superioribus uberius expositam reducit. Quare ne tota ista hic repetatur, rem omnem uno alteroue exemplo illustrabimus.

§. 1223. In campo aperto sit murus indefinitae longitudinis AB, umbram solis in partem DE proiciens atque querenda sit umbrae claritas in dato quouis puncto E, cum non nisi a caelo sūdo collustratur. E puncto E agatur normalis DE, ipsique insistant verticalis DC atque ducta CE, erit CED altitudo muri adparens maxima. Quodsi iam E ponatur esse centrum sphaerae, atque in huius superficiem proiciatur recta AB, adscindet circulum sphaerae maximum, similemque abscindet basis muri FG. Prior horum circulorum sit QE, posterior BE, atque erit EQB dimidia pars hemisphaerii caeli a muro obtecta, unde lumen caeli in datum punctum incidens, erit illud quod

Fig.
106.

Fig. 15.

quod debetur reliquae parti caeli AEQC, adeoque vi theorematis XII. (§. 145.) definitur sequentem in modum.

§. 1224. Claritas caeli sudi media vocetur $=c$, albedo campi obumbrati $=A$, erit eius claritas, cum a toto caeli hemisphaerio, siue absolute illuminatur $=cA$. Est vero illuminatio absoluta ad illuminationem puncti ACQE utrinque debitam ut π ad $\frac{1}{2}\pi$ ($1 + \sin CQ$) adeoque erit claritas puncti dati

$$u = \frac{1}{2}cA(1 + \sin CQ)$$

siue si ad figuram CVI. reuertamur

$$u = \frac{1}{2}cA(1 + \cos CED)$$

Ponatur verticalis $CD=1$, ipsique insistant semicirculus CHD, ducta porro CH erit

$$u = \frac{1}{2}cA(CD + DH)$$

siue cum sit

$$\frac{1}{2}(1 + \cos CED) \cos \frac{1}{2}CED$$

erit

$$u = cA \cos^2 \frac{1}{2}CED$$

Unde liquet

THEOREMA LII.

§. 1225. Claritas umbrae solaris, quam in campo aperto proiicit murus horizontalis indefinitae longitudinis est factum ex claritate caeli media, albedine campi & quadrato cosinus dimidiaae elevationis muri maxime adparentis CED.

Fig. 107. §. 1226. Spatium campi aperti ADEG ab utroque muro contiguo ABCFED obumbratur, atque quaerenda sit claritas umbrae in dato quouis puncto G. Ductis iterum normalibus GL, GH, erectisque verticalibus LK, HI, ducantur porro AG, BG, KG, CG, IG, FG,

FG, EG, DG, atque pyramides umbrosae ABCDG, CDEFG productae in hemisphaerio caeli abscindunt partem eam, quam obtegit uterque murus, cuiusque adeo lumen in G non incidit, atque muri AC, CE in hemisphaerio obtegent quadrilatera quale in figura XV. est FGMP. Dicta ergo illuminatione absoluta $= \pi$, erit (§. 149.) illuminatio quadrilatero Fig. 15. isti debita

$$= \frac{1}{2}FP - \frac{1}{2}GM.\cos GEF$$

Unde si ad figuram CVII. reuertamur, erit pars illuminationi absolutae detracta

$$\text{a muro ABCD} = \frac{1}{2}AGD - \frac{1}{2}BGC.\cos KGL$$

$$\text{a muro CDEF} = \frac{1}{2}DGE - \frac{1}{2}CGF.\cos IGH$$

Quare illuminatio residua erit $= \pi - \frac{1}{2}(AGD + DGE) + \frac{1}{2}BGC.\cos KGL + \frac{1}{2}CGF.\cos IGH$.

§. 1227. Hinc iam habebitur claritas puncti G, si illuminatio ista minuatur in ratione $\pi:cA$, quare erit

$$v = c.A - c.A \frac{(AGD + DGE)}{2\pi} + \frac{BGC.\cos KGL.c.A}{2\pi} + \frac{CGF.\cos IGH.c.A}{2\pi}$$

§. 1228. Quod si uterque murus fuerit infinite extensus, sibi que inuicem parallelus, anguli ADG, DGE, BCG, CGF abeunt in semicirculos, eruntque ergo $= \pi$, quare formula ita contrahetur

$$v = \frac{1}{2}c.A(\cos KGL + \cos IGL)$$

§. 1229. Quod si muri alterutrius quaedam pars a sole directe collustretur, umbrae claritas augebitur, atque data claritate vel albedine muri, incrementum istud claritatis haud secus

secus definietur, oriatur enim triangulum vel quadrilaterum, quod si in sphaeram transferatur, illuminatio ipsi debita dabitur per §. 150. seqq.

Fig.
108.

§. 1230. Definienda sit umbra solaris in dato puncto camerae E, quod nonnisi per fenestram apertam ABCD a caelo sudo vel nubibus aequae albidis obducto collustratur. Ducta iterum normali EF, erectaque verticali FGH, ducantur rectae GE, HE, AE, BE, CE, DE, atque erit ABCDE pyramis luminosa, per quam lumen caeli in E coincidit. Quare dicta illuminatione absoluta $= \pi$, vi eiusdem theorematis XII. erit illuminatio debita (§. 149.)

quadrilatero AIKB $= \frac{1}{2}IEK - \frac{1}{2}AEB.\cos HEF$

quadrilatero DIKC $= \frac{1}{2}IEK - \frac{1}{2}DEC.\cos GEF$

adeoque illuminatio fenestrae debita

$$= \frac{1}{2}DEC.\cos GEF - \frac{1}{2}AEB.\cos HEF$$

Haec in ipsam claritatem puncti E abibit, si minuatur in ratione $\pi : cA$, erit ergo claritas in E

$$u = \frac{c.A}{2\pi} (DEC.\cos GEF - AEB.\cos HEF)$$

§. 1231. Haud absimili modo definietur umbra solaris datis quibuscumque partibus hemisphaerii caeli debita. Claritatem caeli sudi mediam ad claritatem solis se habere vidimus ut 1 ad 277000. (§. 914.) Ut adeo hac assumpta, claritas umbrae cum claritate loci a sole collustrati definiri possit.

§. 1232. Ponamus v. gr. punctum quoddam superficiei horizontalis ita obumbrari, ut
a toto

a toto caeli hemisphaerio collustretur, ea tantum parte excepta, quam discus solaris occupat. Hac ergo ratione obtinebit illuminatio fere absoluta. Dicta ergo claritate solis $=C$, claritate caeli sudi media $=c$, semidiametro solis adparente $=s$, atque erit illuminatio caelo debita ad eam quae soli debetur ut c ad C . $\sin s^2$. Quodsi ergo fuerit $s = 16'$, & $c:C = 1:277000$, ratio ista erit $=1:6$. Quare claritas, quae debetur soli claritatem hemisphaerio caeli sudi debitam fere sexies superat, ut adeo sexta fere parte clariora sint loca, quae & a sole & a toto caelo collustrantur, ac ea, quae nonnisi a sole collustrantur. Ceterum hanc rationem admodum variabilem esse supra vidimus (§. 910. 913.)

§. 1233. Calculus, quo definitur claritas penumbrae, ab eo quem haecenus exemplis illustrauimus, plane non differt. Cum enim loca quaedam ideo ex parte tantum obumbrantur, quod radii, quos obiectum luminosum in ista proiiceret, nisi obstaculum obesset, ex parte intercipientur, atque obiectum luminosum, qua late patet, videri nequeat, verum ex parte obtegatur; pars ista obtecta spectanda est, quasi non adesset, unde quaerendo illuminationem parti non obtectae debitam, habebitur penumbrae claritas. Unde vel per se patet, hac ratione rem omnem ad illuminationem directam reductam esse. En exemplum illustrius.

§. 1234. Quaerenda sit claritas penumbrae in ecclipsi lunari obseruandae. Sit S sol, AB eius diameter, TDV tellus, PQ orbita lunae. Fig. 109. Ducan-

Ducantur axis SDC, tangentes ATC, BVC, AVQ, BTP, erit ACB conus umbrosus NO diameter umbrae totalis, PQ diameter penumbrae POK. Porro est ATB diameter solis adparens e tellure visa, PTQ diameter adparens telluris e luna visa siue dupla parallaxis horizontalis. Est vero

$$PTQ = TQV + ATB + TAV$$

$$AT^2 = PTN$$

unde neglecto angulo TAV, erit

$$PTQ = TQV + PTQ$$

Quare diameter penumbrae est summa diametri telluris e luna visae & diametri solaris adparentis. Porro angulus PTN est differentia semidiametrorum umbrae totalis & penumbrae, atque diametro solis aequalis.

§. 1235. Sit iam M punctum in superficie lunae, ducantur tangentes MTt, MVv, erit circulus tv discus telluris e luna visus atque in discum solis proiectus, lunula Bsv pars disci solaris radios in M diffundens, pars lenti-formis Av ea est, quae a tellure est obteeta, visuique spectatoris in M subducta. Est vero

$$MVQ = AVv$$

Quare angulus elongationis puncti M ab extremitate penumbrae Q aequalis est latitudini adparenti partis obteetae Av.

§. 1236. At iam quantitas luminis in M incidens est in ratione areae disci solis non obteeti siue lunulae Bsv, quam ergo medium quoddam sumendo sequenti ratione definie-mus.

§. 1237. Diametrum disci solaris AB diui-demus in 12 partes aequales siue digitos, at-
que

que facile patet in totidem partes diuidendam esse differentiam semidiametrorum utriusque umbræ PN siue OQ. Quo facto erit MQ totidem digitorum, quot habet latitudo partis solis obtectæ Av.

§. 1238. Porro aream disci solaris ponemus $= 1$, atque hac ipsa unitate designabimus claritatem loci M non obumbrati, atque aream partium disci solaris non obtectarum.

§. 1239. Sit iam
diameter telluris $tMv = 1^{\circ}, 52'$
solis $ATB = 0,32$

erit

diameter penumbræ $PTQ = 2,24$
umbræ totales $= 1,20$

unde

vt: $AB = 7:2$

§. 1240. Ducta chorda communi KL, erit KvL segmentum disci telluris, KAL segmentum disci solaris, utriusque vero summa est pars solis obtecta. Quare ex assumpta aera circuli KBL, ratione inter diametros AB, tv, & latitudine Av, dabitur area spatii AKvL. Hanc ergo pro singulis digitis partium Av siue MQ in tabella sequente ob oculos ponemus.

Bv, OM digit.	area AKvL siue claritas penumbrae	Av, siue QM digit.
0	0,000	12
1	0,029	11
2	0,082	10
3	0,149	9
4	0,239	8
5	0,339	7
6	0,437	6
7	0,542	5
8	0,655	4
9	0,759	3
10	0,864	2
11	0,949	1
12	1,000	0

§. 1241. Diuisa ergo differentia umbrarum OQ in duodecim partes aequales (§. 1237.) atque pro quouis loco disci lunaris M ope huius tabellae dabitur claritas penumbrae. At probe notandum umbras NO, PQ non esse eas quae obseruantur, verum eas quas prodit calculus ecclipsos lunaris. Etenim facile ostendetur, utramque vel necessario debere esse diuersam.

§. 1242. Patet enim ex hac tabella initium penumbrae siue loca limbo QP viciniora adeo parum differre a claritate lunae a toto disco solari collustratae, ut differentia ab oculo discerni plane non possit (§. 265. seqq.) Quare penumbrae initium & finis minus ab inuicem videbuntur distare, ac reuera distant.

§. 1243.

§. 1243. Porro penumbra in O & N ipsi umbrae totali ita fit similis, ut verum initium umbrae oculi aciem effugiat, siue ista absoluta sit tenebrosa, siue ipsi misceatur lumen per athmosphaeram refractum (§. 270.) Quare vel necessario pars quaedam penumbrae ipsi umbrae totali accensetur, atque hoc ipso, si ex observationibus istis quaeras diametrum athmospherae telluris lunam obumbrantis, hanc inuenies debito maiorem. Ponamus oculum eas claritates aequales habere, quae trigesima parte differunt, ex tabella §. 1240. patet fore $ON = 1$ dig. unde posita diametro solis $= 32'$, uni digito respondebunt $2\frac{2}{3}$ min. Est vero semidiameter telluris adparens $tv = 56$ min. Quare si penumbra, cuius claritas est $= \frac{1}{30}$, ipsi umbrae totali accenseatur, inde aucta erit semidiameter telluris parte $2\frac{2}{3} : 56 = \frac{1}{21}$. At vero haec omnia, quae de limitibus umbrarum breuibus hic notauimus, ex ipsis ecclipsium observationibus curatius definientur.





INDEX RERVM.

Aberrationes, quae in iudicio oculi occurrunt
§ 272. seqq. medium ex iis sumendum 277.
seqq. ad probabilitatis computum reducun-
tur 281. seqq. earum causae 282. frequen-
tia 285. 286. computus 287. seqq. metho-
dus singularis 295. seqq. earum vices 296.
maximae unde sint 307. singulari methodo
definiuntur 396. seqq.

Adfectus quomodo experimenta turbent §.
307.

Aer, eius pelluciditas calculo peruestigatur
§. 865. seqq. lumen intercipit 866. 874.
eius altitudo 987. ex crepusculo primario
deducta 1001. ex secundario 1002. ex pro-
gressu crepusculi 1014. 1028.

Aerugo cupri eius color & vis reflectens §.
758. radii rubri quos reflectit 1188.

Albedo corporum §. 704. 705. luminis vera
707. perfecta 708. corporum opacorum 709.
absoluta 710. instar unitatis est 725 gradus
albedinis, quomodo definiantur ibid. expe-
rimentis 739. seqq. earum comparatio 771.
773. 774.

Albedo scapi chartarum quanta sit? §. 748.
chartae simplicis 752. regiae ibid. bubulae,
subcaeruleae 753. cerusae 754. 755. plane-
tarum 1035. telluris 1072. lunae ibid.

Angu-

Index Rerum.

- Angulus emanationis §. 80. 621. qua ratione illuminationem variam reddat 81.
Aqua marina, qua ratione lumen in ea dispergatur §. 468.
Arcus visionis planetarum §. 1132.
Asperitas unde sit §. 615. an perfecte tolli possit 267.
Aethmosphæra telluris, qua ratione in ea debilitetur lumen §. 865 seqq. quo modo deprimenda 888. seqq. claritas computatur 900. quomodo pendeat ab altitudine solis 909. 912. claritas media 914. maximæ in quam altitudine sint 931. ceteræ 945.
Aethmosphæra eius diameter an ex umbra eclipsæ lunæ deduci possit §. 1243.
Aurum, quatenus diaphanum sit §. 617.
Jac. Bernoullius §. 281.
Io. Bernoullius §. 987.
Bouguer §. 315. 360. 468. 475. 556. 557. 865. 885. 910. 1030. 1048. 1072.
Bracteola auri lumen transmittit §. 617.
Bradleius §. 1137. 1150.
Brander §. 1008.
Caelum sudum, eius claritas §. 914. 945. illuminatio plani horizontalis a cæli hemisphaerio, quanta sit 1232.
Calculus limitum §. 369. seqq. Calculi phaenomenon 110.
Camera obscura eius usus in Photometria §. 320. 339. 557. 1177. seqq. 1193. seqq.
Candelæ claritas comparatur lunæ §. 1075. plures an in experimentis tuto adhibeantur 311. cautelæ 312.
Cartesius §. 18.

Index Rerum.

- Cautelae** experimentorum generales §. 272. seqq. 307. seqq. specialiores 311. seqq. 329. 332. 381. 386. 392. 517. 523. 590. 678. 742. 743. 853.
- Celeritas**, qua irrumpit nox §. 1025. 1026. quando maxima 1029.
- Celeritas** radiorum diuersi coloris §. 1156.
- Cerussa** eius albedo §. 754. 755. subflaua est 765. eius claritas cum claritate solis comparatur 777.
- Charte** albedo §. 748. 752. 753. 754. simplex quotam luminis partem transmittat 752.
- Chefeaux** §. 1138. 1141.
- Circulus** logicus in Photometria vix euincibilis §. 8. 22. clauditur 784.
- Claritas** visa §. 37. ab illuminatione differt 37. 73. 79. 529. eius computus 784. seqq. centralis imaginis in foco lentis 500. media 491. in foco sphaerae 550 555. superficiei telluris 964.
- Claritatum** comparatio quatenus facilius §. 308. difficilius 309. medela ibid.
- Claritas** obiectorum illuminatorum quomodo cum claritate luminis comparanda §. 766. seqq. 770. seqq. ad numeros absolutos reducitur 778. unitates assumptae 780.
- Color** minii eius mensura §. 756. Zinnabaris 1188. succi baccarum Rhamni 757. aeruginis cupri 758. luminis collustrantis 1205.
- Color** corporum naturalium §. 1165. eorum indoles 1167 compositus ibid.
- Colorum** comparatio 1168. 1169. lex comparationis 1170. 1171. experimenta 1173. 1177.

Colo-

Colorum claritas & differentia §. 1153. prismaticorum ordo 1162.

Constructio concinna §. 261. focorum lentis 572. aberrationum 396. 478. alius usus 482.

Contractio pupillae §. 892. partialis 848.

Conus luminosus radiorum diuergentium & coincidentium §. 103. obliquus 130. seqq. extremus 495. illuminatio ipsis debita 126. seqq. usus speciales 490. 796.

Copernicus §. 1137.

Corpus illuminatum luminis vicem sustinet §. 34. quid de eo statuatur 40. 621. luminosum circulare & sphaericum 109. 115. 135. seqq. triangulare 145. seqq. poligonum 151. seqq. curvilineum 161.

Corpora pellucida §. 317. seqq. 321. perfecte pellucida 324. 326. seqq.

Corpora opaca §. 617. pellucidis similia ibid. 629. quomodo videantur colorata 620. quomodo lumen reflectant 622. quando speculorum instar sint 624. eorum cruditas 615. colorata 722. seqq.

Corpora alba §. 704. eorum albedo 709. absoluta 710. num detur 708. 712. claritas 715. 716. seqq. 766. seqq.

Crepusculum, eius historia naturalis §. 987. 1008. breuissimum 988. seqq. primarium 998. secundarium 999. eius progressus obseruatus 1008. altitudo aeris inde collecta 1014. 1028. distantia primarii a secundo 1016. utriusque comparatio 1018. seqq. figura adparens 1020. seqq. progressus 1024.

Crisis sanior ubinam requiratur §. 398.

Cuinulatio motus tremuli in retina oculi §. 1121.

- Curvarum** usus in definiendis experimento-
rum aberrationibus §. 396. seqq. alius ea-
rum usus 848. seqq.
- Debilitatio** luminis athmosphaeram peragran-
tis §. 865. seqq. 876. 877. quomodo ad aequa-
litatem disseminationis reducatur 888. seqq.
- Densitas** radiorum §. 39. 44. 1171. 1209. obsta-
culorum lumen intercipientium 874. radio-
rum coloratorum experimentis definienda
1179. 1180. 1181. seqq. rubrorum 1187.
- Diameter** athmosphaerae telluris an ex umbra
eclipseos lunaris deduci possit §. 1243.
- Dies** quo successu eum detrudat nox §. 987.
quando id fiat celerrime 1029.
- Diluculum** matutinum unde clarius videatur
crepusculo vespertino §. 7.
- Dispersio** luminis, eius causae §. 323. seqq. 326.
in aqua marina 468. seqq. in planis vitreis
ibid. eius computus 467. seqq. a corporibus
opacis 699. eius lex 621. experimentis fir-
matur 700.
- Disseminatio** obstaculorum lumen intercipien-
tium §. 866. quatenus sint ibid. seqq. eorum
densitas 874.
- Distantia** luminis, qua ratione minuat illumi-
nationem §. 48. experimentis firmatur 58.
59. 256. 260. 531.
- Distantia** Fixarum §. 1144. seqq.
- Ecclipsis** lunae, eius penumbra §. 1234. huius
claritas 1240.
- Emanatio** luminis, an eius obliquitas illumina-
tioni obsit §. 71. seqq. an obsit claritati ima-
ginis in foco lentis 537.
- Errores** experimentorum, eorum frequentia
281.

Index Rerum.

281. feqq. triplex caussa 282. computus 288.
feqq.

Eulerus $\S$. 3. 4. 18. 41. 42. 71. 110. 117. 118. 347.
556. 1030. 1153. 1160. 1161.

Experientiae communes quibus Photometria
superstruitur §. 21. quatenus sint dubiae 22.
examinantur 46. seqq. 226. seqq.

Experimentorum cautelae §. 272. seqq.

Vid. Cautela.

Fallaciae oculi definiuntur §. 265. seqq. earum
limites 269. medela 272. seqq.

Fixae, earum magnitudo adparens §. 1113. color diuerfus 1142. distantia 1144. seqq. illuminatio ipsis debita 1152.

Fixarum eccliptica §. 1139.

Focus lentis primarius, eius claritas §. 489. seqq.
secundarii eorum computus 561. seqq. cla-
ritas primarii anterioris experimentis explo-
ratur 589.

Galaxia §. 1139.

Globus lucidus, quantitas radiorum quos diffundit §. 168. seqq. 173.

Gradus albedinis quomodo definiantur §. 725.
experimentis 739. seqq.

Halleius §. 140. 987.

Huygenius §. 18. 1137. 1149.

Hydrargyrum, eius vis reflectens §. 687. 691.

Hyperbola, eius usus §. 360.

Hypotheses, earum usus §. 4. criterium ibid.
specialis 415. seqq. huius symptomata 439.
440. 443.

Illuminatio §. 36. eius principia & leges 21.
 seqq. 46. seqq. quatenus immutari possit 65.
 66. 98. absoluta 100. directa, eius casus ge-

Mm s

nera

Index Rerum.

- nerales 102. differt a claritate visa 37. 73.
79. 529. speculis planis debita 638. 641.
planetis debita 1127 seqq.
Imago in foco lentis eius illuminatio §. 496.
seqq. media 498. 501. seqq. 512. centralis
500. 503. 504. pluribus lentibus debita 595.
seqq. primaria 559. ceterarum computus
562. seqq. 587. anterioris claritas 589.
Imago plano albo excepta, eius claritas §. 735.
Imago in retina oculi distincta §. 1105. confusa
ibid. depicta 1117. sensibilis ibid.
Impelluciditas medii diaphani §. 874.
Incuria obseruatoris §. 282. 283. 307.
Inflexio luminis §. 869.
Instrumenta photometrica §. 1196. 1197.
Intensitas luminis §. 39.
Iris oculi an lumen in eam incidens pupillam
contrahat §. 830.
Irruptio noctis §. 1025. tempus ibid. celeritas
maxima 1029.
Jurinus §. 1111. 1115. 1116.
Kaestnerus §. 556. 698. 795. 820. 833. 987.
Keplerus §. 1132. 1137.
Kiesius §. 1030.
Lamella diaphana §. 268. 620. seqq.
Laterna magica §. 557.
Latera coni extremi §. 494.
Lens caustica, qua ratione lumen intendat §.
487. seqq. eius impelluciditas unico experi-
mento definitur 516. seqq. eius necessitas 523.
concaua eius computus 546. seqq.
Lex continuitatis §. 416. Leges Photometriae
§. 55. 58. 84. 97. 228. 530.
Lignum nephriticum §. 619.

Limi-

Index Rerum.

- Limites errorum oculi** §. 269. **usus** 523.
Limitum calculus specialis 369. **seqq.**
Logistica spiralis §. 893. **communis** an exhibeat debilitationem luminis per plana vitrea transmissi 360. eius subtangens exhibet pelluciditatem vitri 484.
Lumen §. 34. alienum 311. electricum 11. emanans 18. 41. dispersum 322. mutuatum 34. 40. 621. directum 70. **seqq.** reflexum 322. 315. 446. **seqq.** refractum 321. lineare 45. 642. **seqq.** 937. nocturnum 1138.
Lumen a vitris reflexum §. 315. **seqq.** 446. **seqq.** a corporibus opacis 614. 622. 623. 696. emanans, coloratum, amissum 623. 624. **seqq.** a speculis reflexum 638. **seqq.** dispersum 700. vere album 707. in aere dispersum 904. a charta transmissum 752. lunare vid. Luna.
Luminis magnitudo vera & adparens §. 38. intensitas 39. via 631. 419. inflexio 869. theoria, eius defectus §. 1. 3. 415.
Luna, eius lumen cum lumine candelae confertur 66. 309. 1075. eius claritas visa 1039. **seqq.** media 1048. phasium 1047. 1050. modificatio annua 1052. menstrua 1053. **seqq.** 1056. **seqq.** computus hypotheticus 1064. claritas phaseos deficientis 1065. **seqq.** centralis 1067. media 1068. 1069. 1071.
Magnitudo adparens luminis §. 38. obiecti 98. *T. Mayer* §. 1036. 1189.
Medium diaphanum, eius impelluciditas §. 874. claritas inde nascens 900. **seqq.**
Methodus stabiliendi Photometriae leges earumque nexum §. 226. **seqq.** definiendi oculi aberrationes 265. definiendi aberrationes expe-

Index Rerum.

experimentorum 280. seqq. 294. singularis,
qua eadem definiuntur 295. seqq. definiendi
limites in rebus physicis 369. seqq. singularis
qua definiuntur experimentorum aberrationes
396. seqq. 478. alia specialis 451. qua vis
radiorum solarium ostenditur 509. 510. definiendi
impelluciditatem lentium 516. seqq. claritatem
imaginis pluribus lentibus debitae 595. seqq.
Microscopium solare §. 557.
Minium, eius color & vis reflectens §. 756.
radii rubri ab eo reflexi 1188.
Miscela radiorum a variis pigmentis reflexorum
§. 1190. 1193.
Newtonus §. 3. 18. 86. 316. 347. 369. 436. 617.
1153. 1157. 1160.
Nox, eius irruptio §. 1025. cui depressioni solis
respondeat ibid. tempus ibid. celeritas maxima
1029.
Obstacula lumen intercipientia §. 866. quae-
nam ibid. seqq. eorum quantitas in aere 916.
quaenam aequae sint illuminata 949. quomodo
illuminentur a sole & a superficie telluris
959.
Oculus, eius iudicium de claritate obiectorum
turbatur a variabili apertura pupillae §. 7.
a consuetudine ibid. 824. comparatur cum
iudicio auris & sensus caloris 9. seqq. 12. facile
adsuefit cuius claritati 13. 310. eius fallaciis
obuiam itur 16. seqq. de qua claritate rite
iudicet 31. 32. curatius examinatur eius
iudicium 255. seqq. definiuntur aberrationes
265. seqq. limites errorum 269. caute-
lae 272. seqq. calculo & experimentis defini-
nitur

Index Rerum.

- n**itur oculi iudicium de claritate directe visa
784. seqq. per lentem visa 795. seqq. per
plures lentes 804. seqq. 817.
- O**pacitas vitri definitur §. 485.
- P**articulae lumen intercipientes §. 323. seqq.
866. seqq.
- P**elluciditas vitrorum §. 484.
- P**enumbra §. 1220. eius computus ad illumina-
tionem directam reuocatur 1223. ecclip-
seos lunae, eius claritas 1234. seqq.
- P**erspiciilla, quaenam sit claritas per ea visa
§ 795. seqq.
- P**hases lunae, earum claritas media visa §. 1047.
1050. modificationes 1052. seqq. illumina-
tio ipsis debita 1056. seqq.
- P**hosphorus §. 174.
- P**hotometria §. 5. 17. caret instrumentis 6.
methodus eam tractandi 17. 18. eius funda-
menta 20. seqq. primae notiones 31. seqq.
leges examinantur 46. seqq. examen cura-
tius 226. seqq. defectus 783.
- P**hotometrum §. 6.
- P**igmentum chartae illitum §. 763. alia ab aliis
collustrata 1195. eorum vis reflectens 1206.
- P**lanetae eorum figura, superficies, claritas §.
1032. differentia luminis & coloris ibid lu-
men definitur 1033. irregularitates 1034.
1035. claritas quomodo pendeat ab oculo
1038. distincte visa media 1039. seqq. albe-
do 1035. primariorum claritas 1079. seqq.
visa per tubum 1080. computus 1082. seqq.
inferiorum phases 1087. superiorum phasis
minima 1089. inferiorum elongatio a sole
maxi-

Index Rerum.

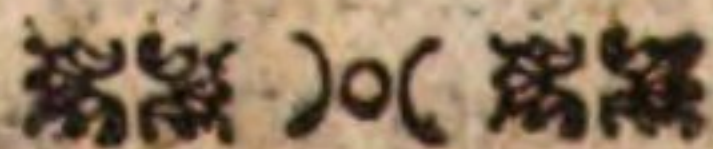
- maxima** 1090. *seqq.* claritas nudo oculo vi-
sa 1102. computus *Iurini* 1003. *seqq.* diame-
ter visa nudis oculis 1111.
Planum luminosum §. 713. album eius clari-
tas 728. *seqq.* 735.
Prisma vitreum 386. 392.
Probabilitas, ad eam reducitur computus er-
rorum in experimentis admissorum §. 281.
seqq. methodus singularis 295.
Processus ciliares §. 821. observationes comu-
nes 822. *seqq.* specialiores 826. 827. expe-
rimenta 830. 853. positiones 833. 835. *seqq.*
causa 831. computus 847. *seqq.*
Progressus crepusculi observatus §. 1008. de-
finitur. 1024.
Ptolomaeus §. 1132. 1143. 1150.
Punctum radians §. 69. quando speculum
sphaericum eius vicem subeat 654. 917.
Pupilla eius apertura §. 6. 7. 23. 27. 28. defi-
nitur experimentis §. 821. 853. computus
855. 863. *seqq.* curva exhibetur 848. curvae
symptomata 858. *seqq.*
Pyramis luminosa §. 52.
Quantitas radiorum §. 43. eorum computus
173. 175. 176. *seqq.* 190. 196. 199. *seqq.* 12-
09. a globo lucido projectorum 168. *seqq.* in
foco lentis 490.
Radius luminis eius idea communis §. 42. 1154.
computus 173. 175. 176. 190. 196. 199. spe-
cies 1206.
Radii diuergentes §. 67. coincidentes 68. colo-
rati 719. 722. eorum reflexio 762. albi 1156.
colorati diuersa sunt celeritate 1156. *seqq.*
simplicium permixtio 1163. 1164. rubri re-
flexi

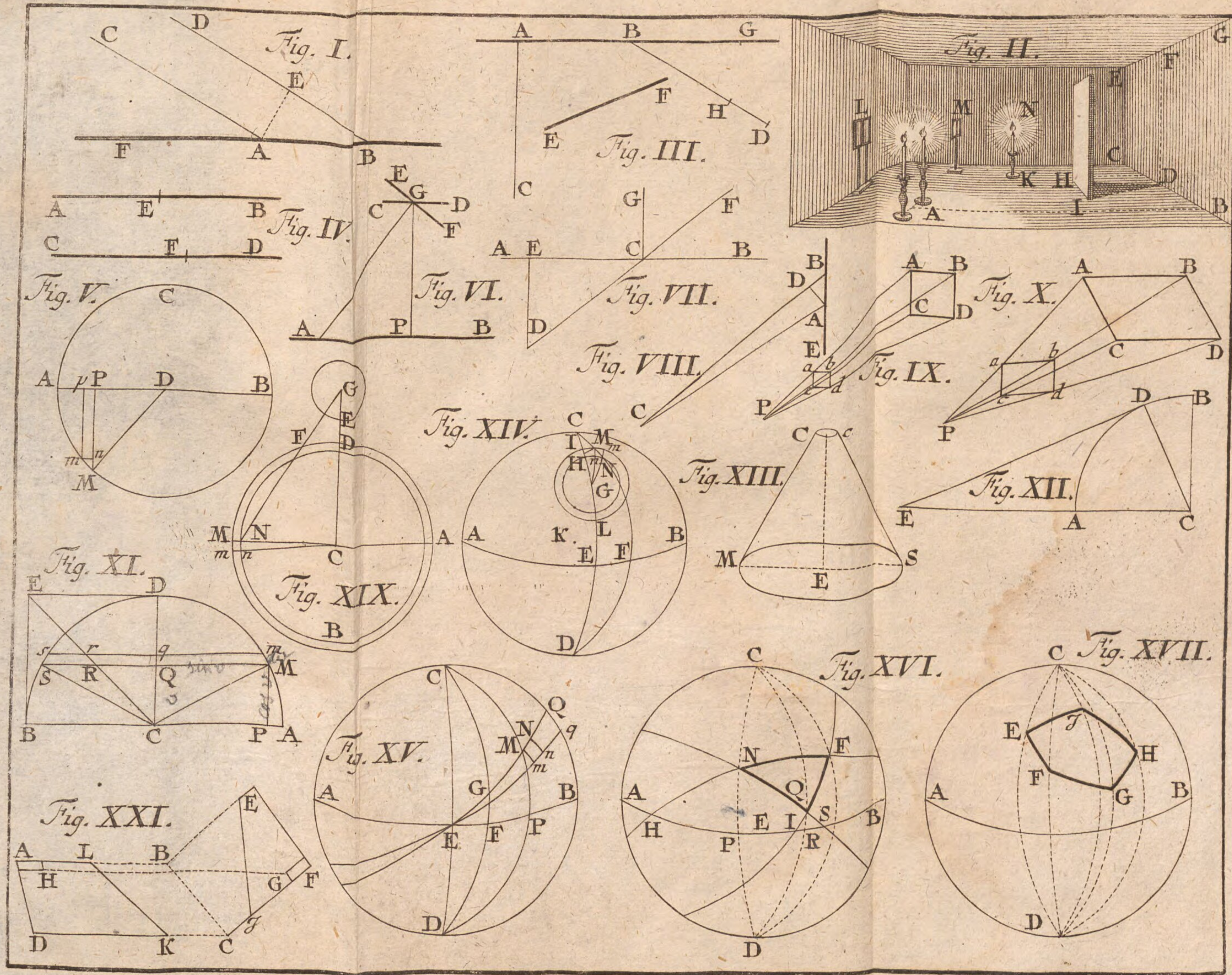
Index Rerum.

- Flexi** a variis pigmentis 1186. 1195. 1198.
solares eorum immensa vis singulari metho-
do ostenditur 509. 510.
- Reflexio** luminis latius patet, quam eius re-
fractio §. 418. quomodo fiat 424. 632.
- Refractio** luminis §. 424.
- Ricciolus** §. 1132. 1137.
- Rubedo** minii §. 756. variorum pigmentorum
1188.
- Segmenta** sphaerae, eorum usus §. 91. seqq.
- Semidiameter** dispersionis §. 1105.
- Sensus** caloris, eius leges & fallaciae §. 9. seqq.
luminis eius computus §. 784. seqq.
- Smithius** §. 101. 556. 795. 820. 959. 987. 1030.
1048. 1050.
- Sol**, eius immensa claritas ob oculos ponitur
§. 509. 510. comparatur cum claritate tel-
luris & aeris 964. cum claritate cerussae 777.
lunae plenae 1051. eius distantia a tellure
1053.
- Species** radiorum §. 1206.
- Specula** quomodo sint adhibenda in experi-
mentis photometricis §. 313. 256. 260. 311.
perfecte reflectentia cur assumantur 637. il-
luminatio speculis debita 638. reducitur ad
directam 641. a speculis sphaericis conuexis
642. seqq. 654. 657. 669. seqq. concaua, eo-
rum computus 672. seqq. plana, eorum vis
reflectens experimentis definitur 677. seqq.
- Sphaera** refringens quomodo lumen intendat
§. 550. seqq. 555.
- Splendor** §. 36.
- Summa** virium reflectentium §. 1205.
- Superficies** illuminans, an eius situs sit indiffe-
rens

Index Rerum.

- rens** §. 82. 83. definitur 87. seqq. 96. absolute plana 616.
- Superficies telluris**, eius claritas §. 964.
- Symptomata hypotheseos specialis** §. 443. curvae ignotae 858. seqq.
- Tenebrae** §. 1218. 1220. nocturnae, earum irruptio 1025. celeritas maxima 1029.
- Thermometrum**, an eius ope claritas luminis solaris definiri possit §. 6.
- Tbummigius** §. 117. 1030.
- Tycho Brahe** §. 1130.
- Varenius** §. 987.
- Via luminis in superficies corporum incidentis** quaenam §. 631 seqq. 419. seqq. in athmosphæra quomodo curtanda 889. 896. in aere depresso quaenam assumenda 896. quando foret logistica spiralis 893.
- Vices aberrationum in experimentis verae** §. 296. observatae, ibid.
- Vis illuminans** §. 36. reflectens speculorum, quomodo definiatur 677. seqq. speculorum vitreorum 682. hydrargyri 687. 691. radiorum, quæ oculum feriunt 1170. 1172.
- Vitra**, eorum vis lumen reflectens & refringens §. 315. seqq. 446. seqq. definitur methodo singulari 451. ope limitum 396. seqq. ope lentium causticarum 558. pelluciditas quomodo definiatur 484. vitrum coloratum 631.
- Vmbra**, eius modificationes & gradus §. 1218. seqq. idea communis 1219. strictior 1220. eius computus 1222. umbra solaris exemplis illustratur 1223. 1225. 1226. 1230. 1232.
- Wendelinus** §. 1137.
- Wolffius** §. 37. 117.
- Zinnabaris**, eius rubedo §. 1138.





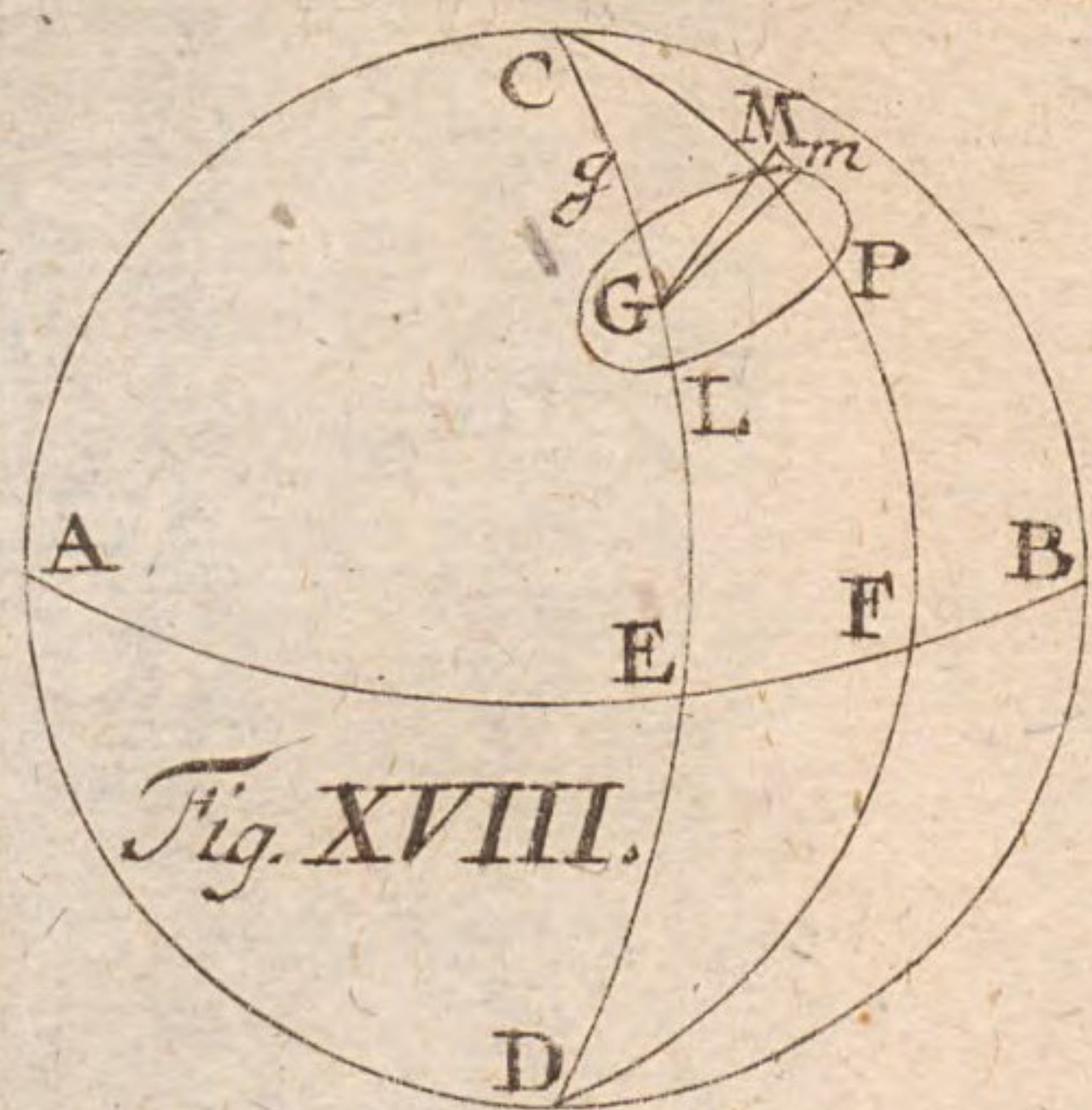


Fig. XVIII.

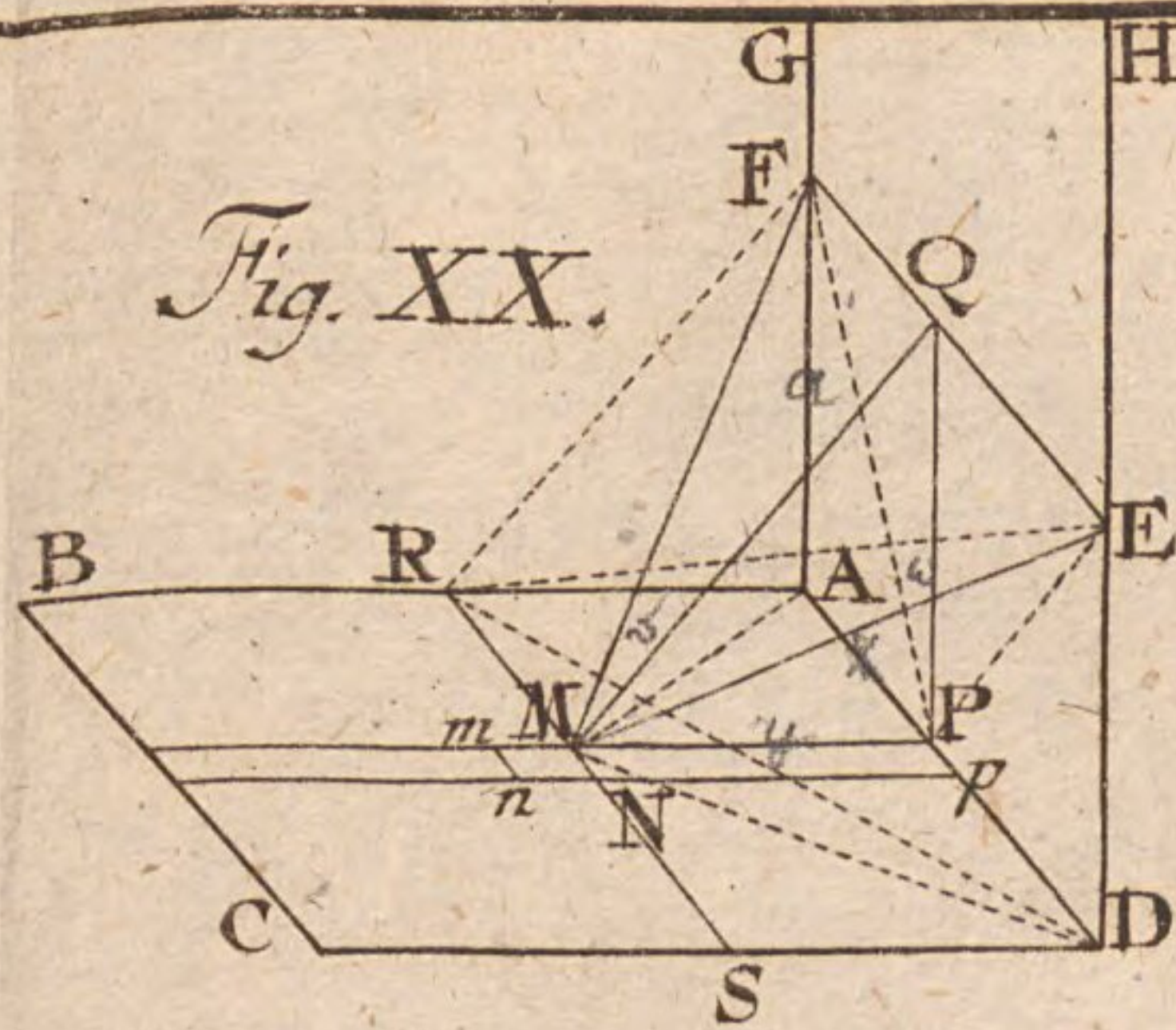


Fig. XX.

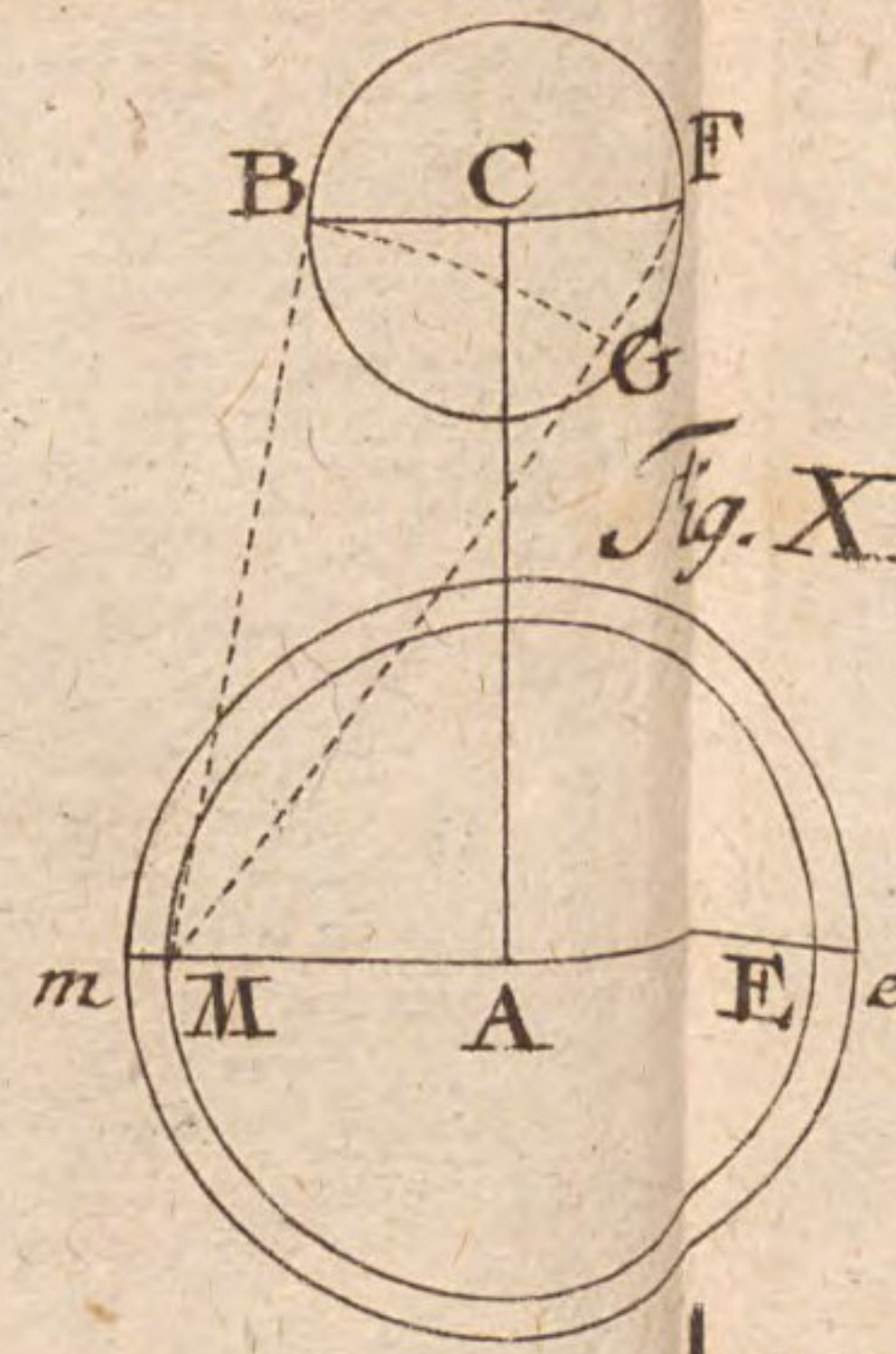


Fig. XXIII.

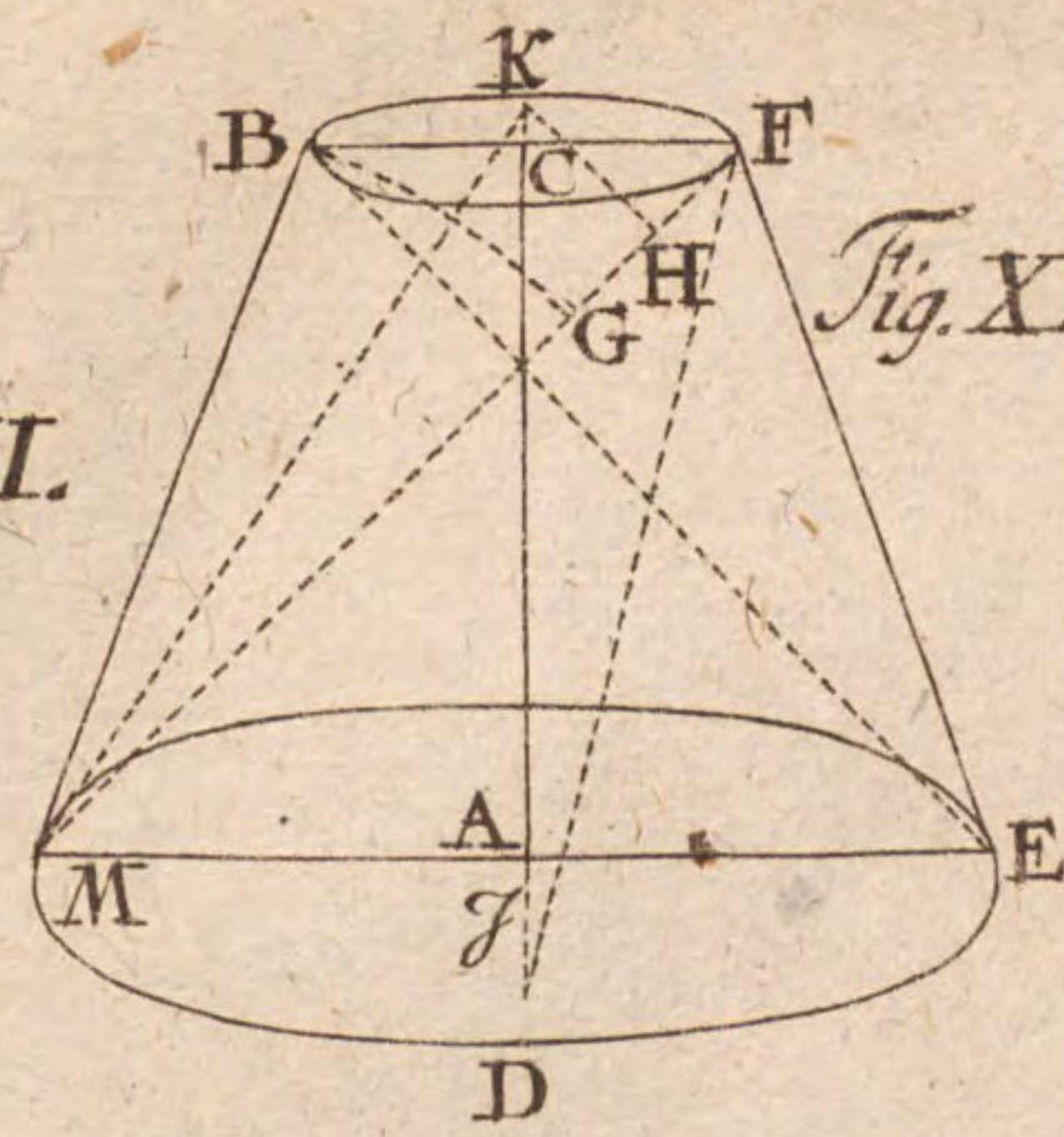


Fig. XXIV.

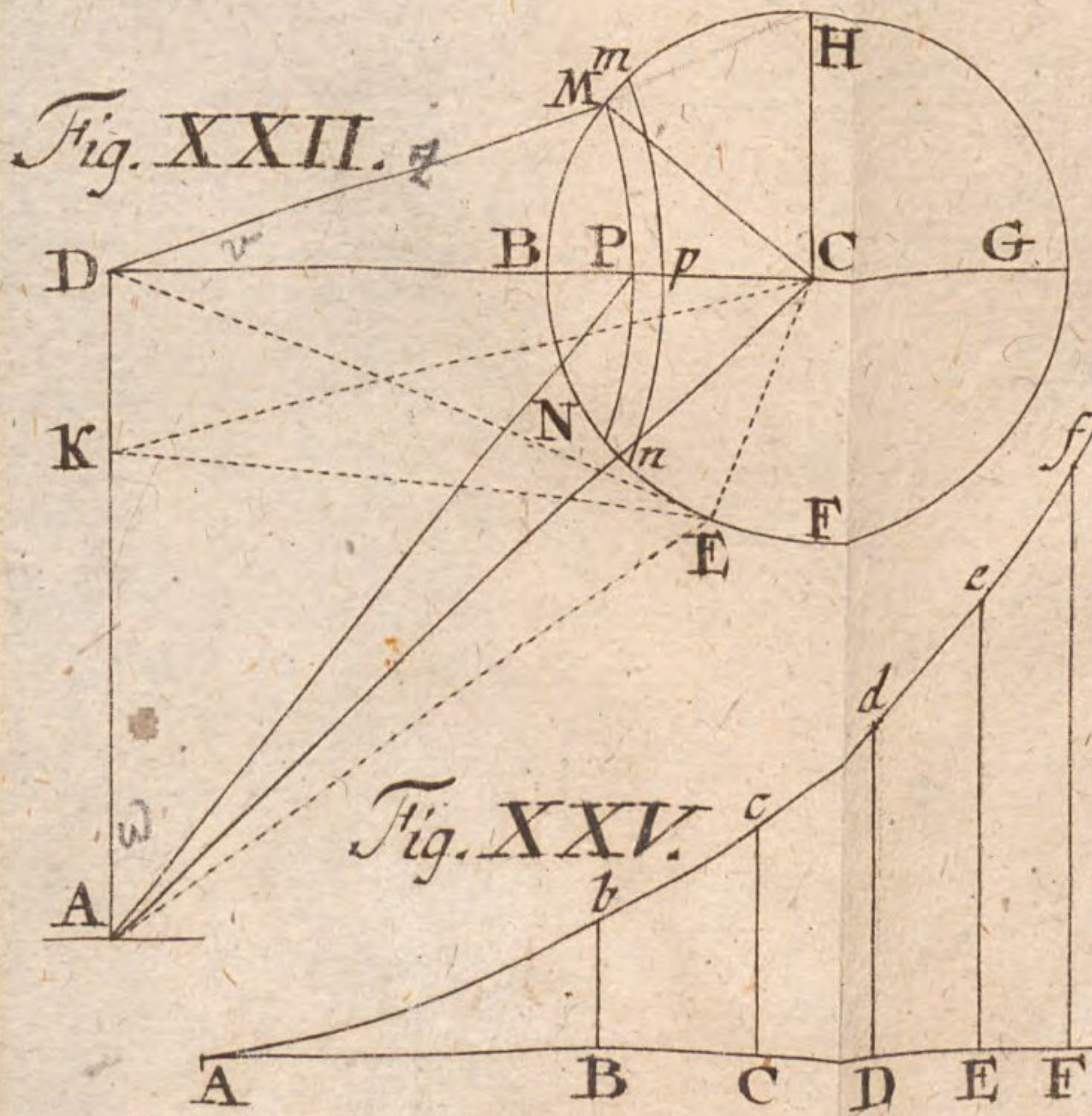


Fig. XXII.

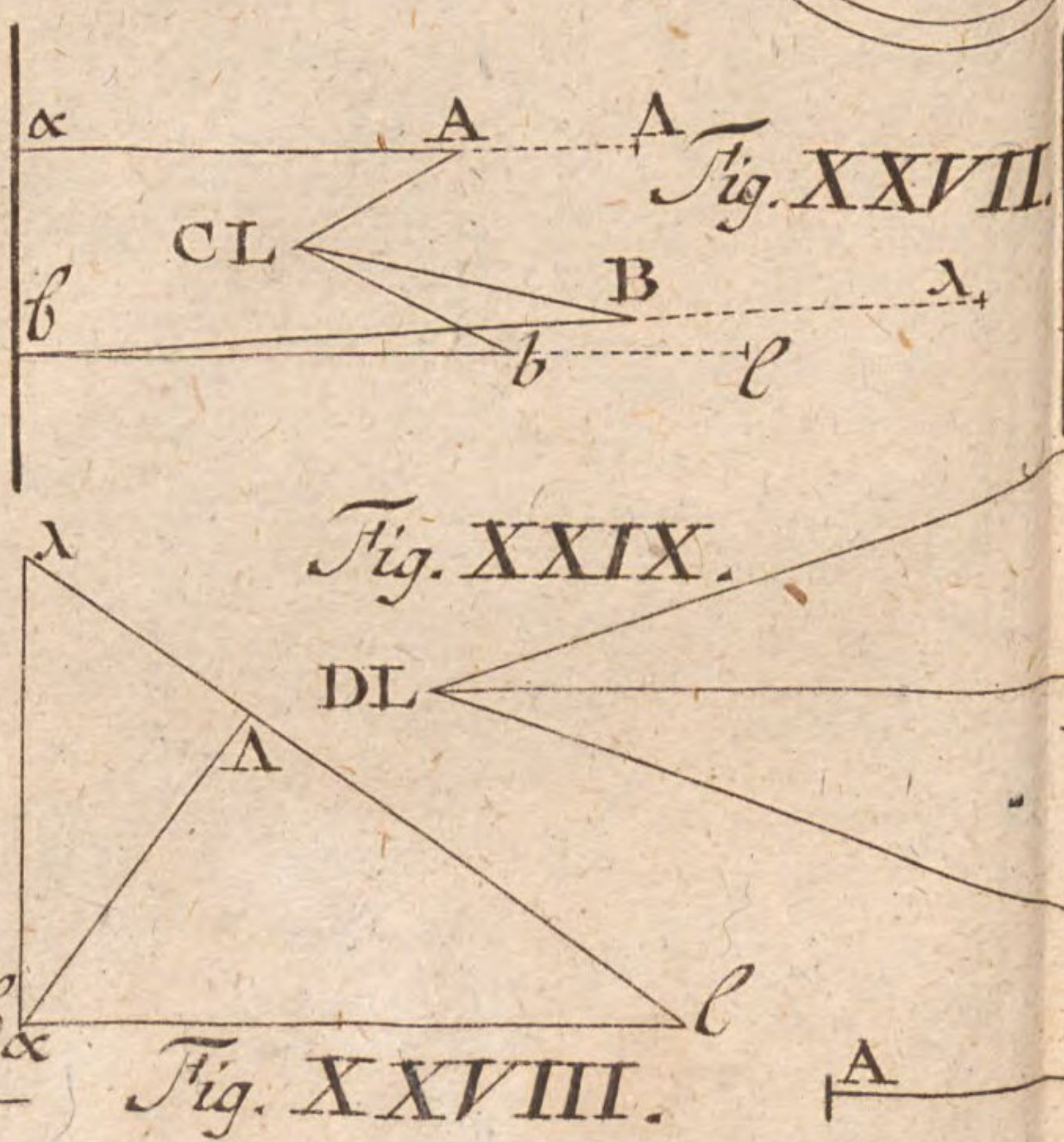


Fig. XXIX.

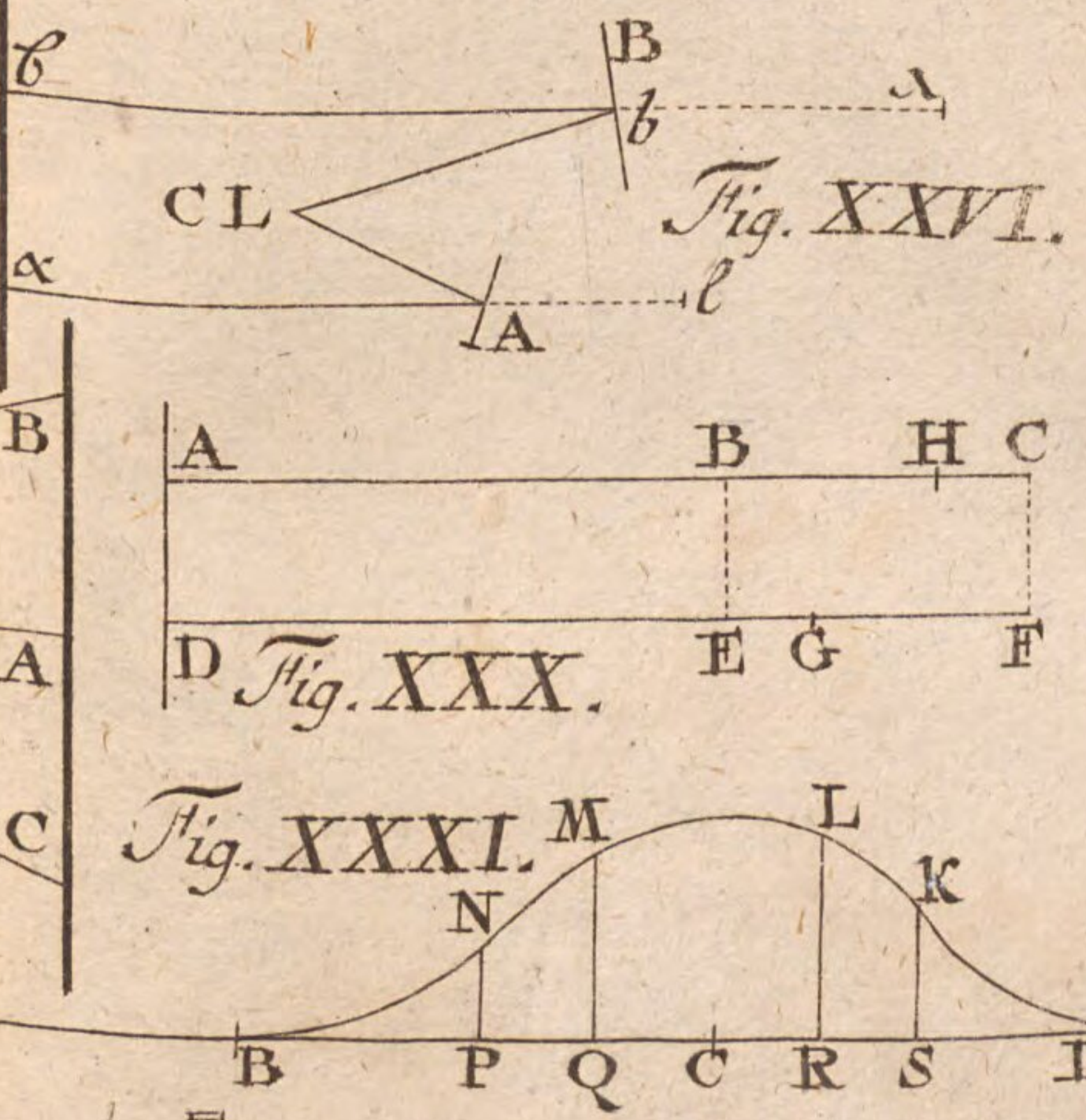


Fig. XXXI.

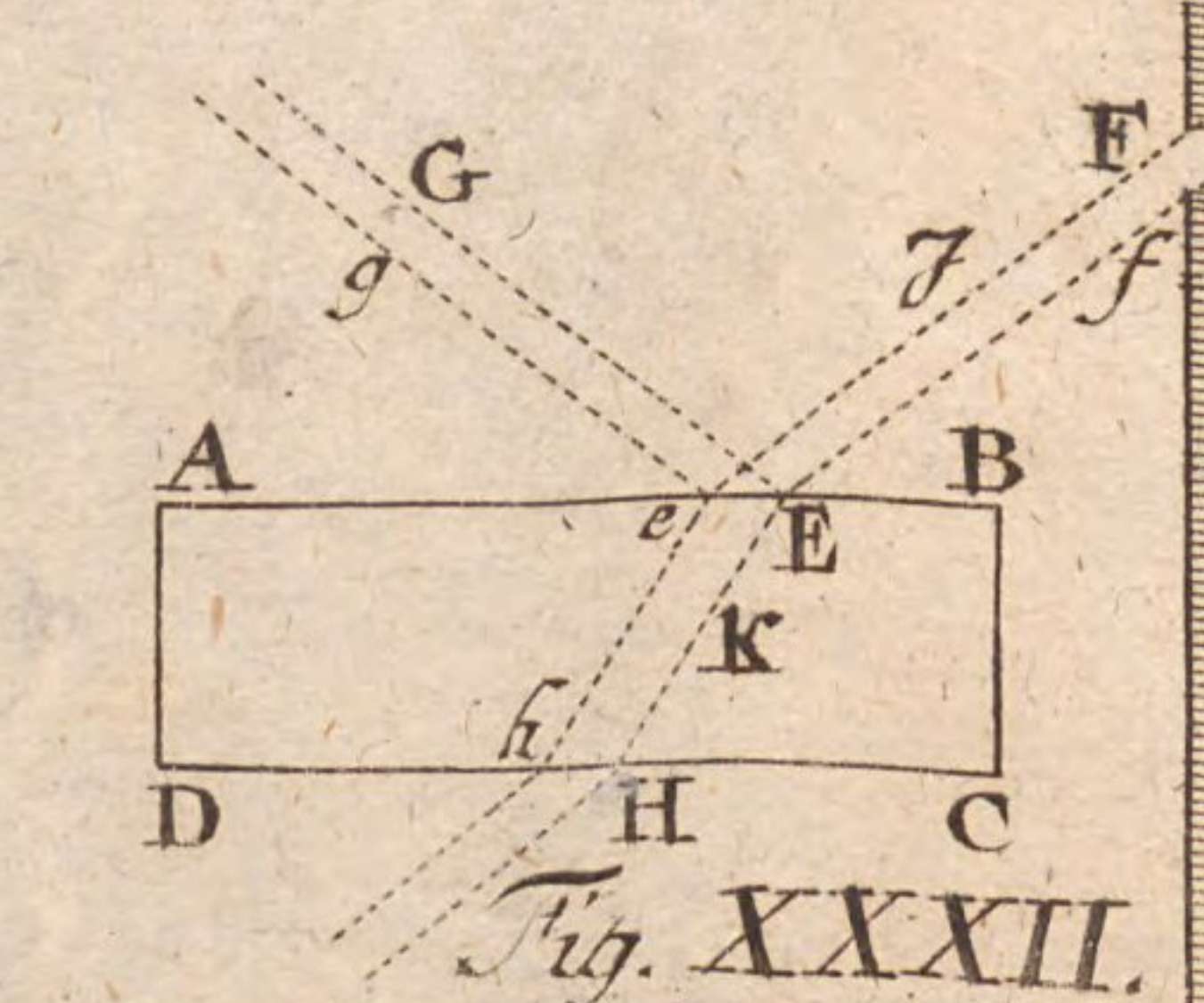


Fig. XXXII.

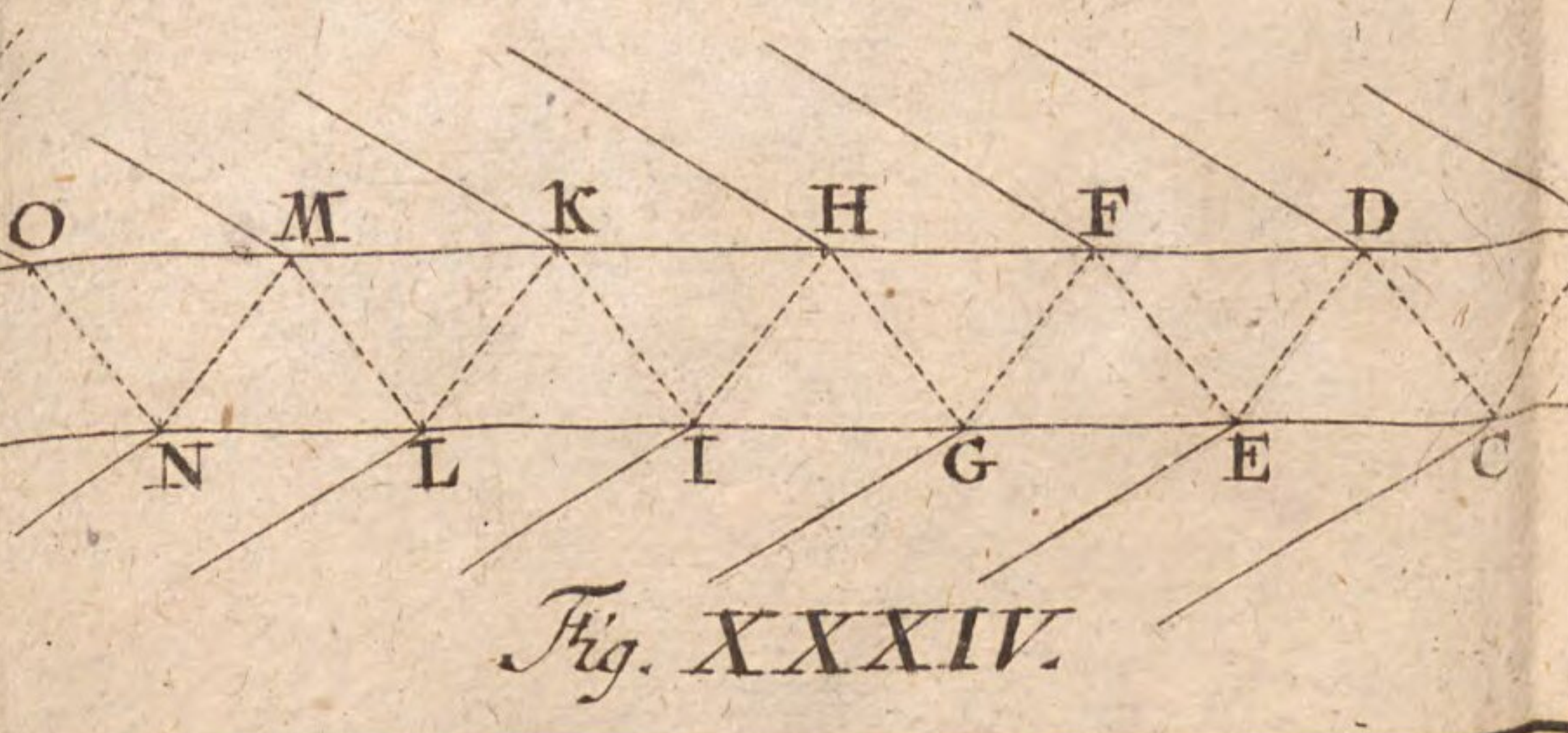


Fig. XXXIV.

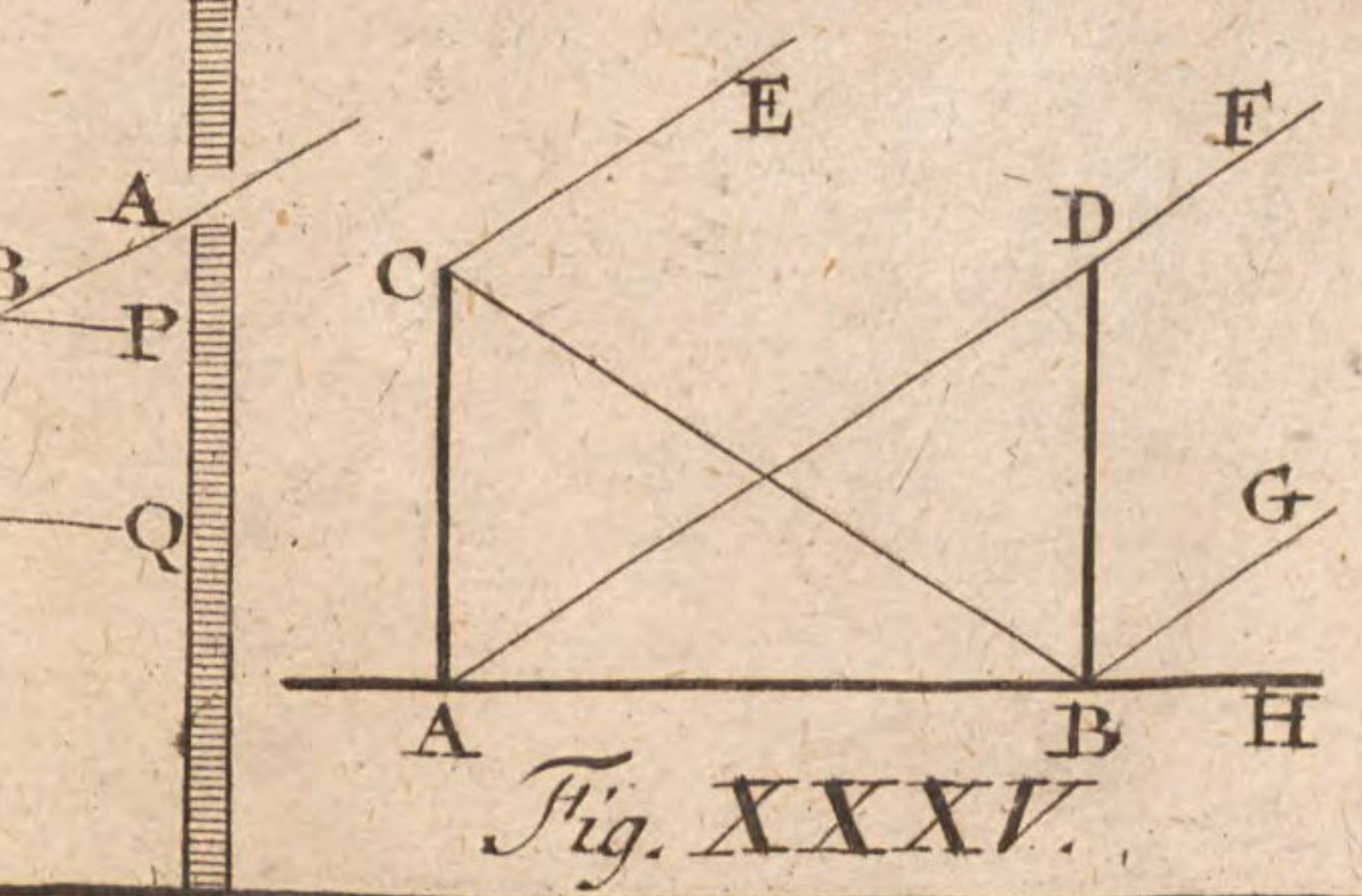


Fig. XXXV.

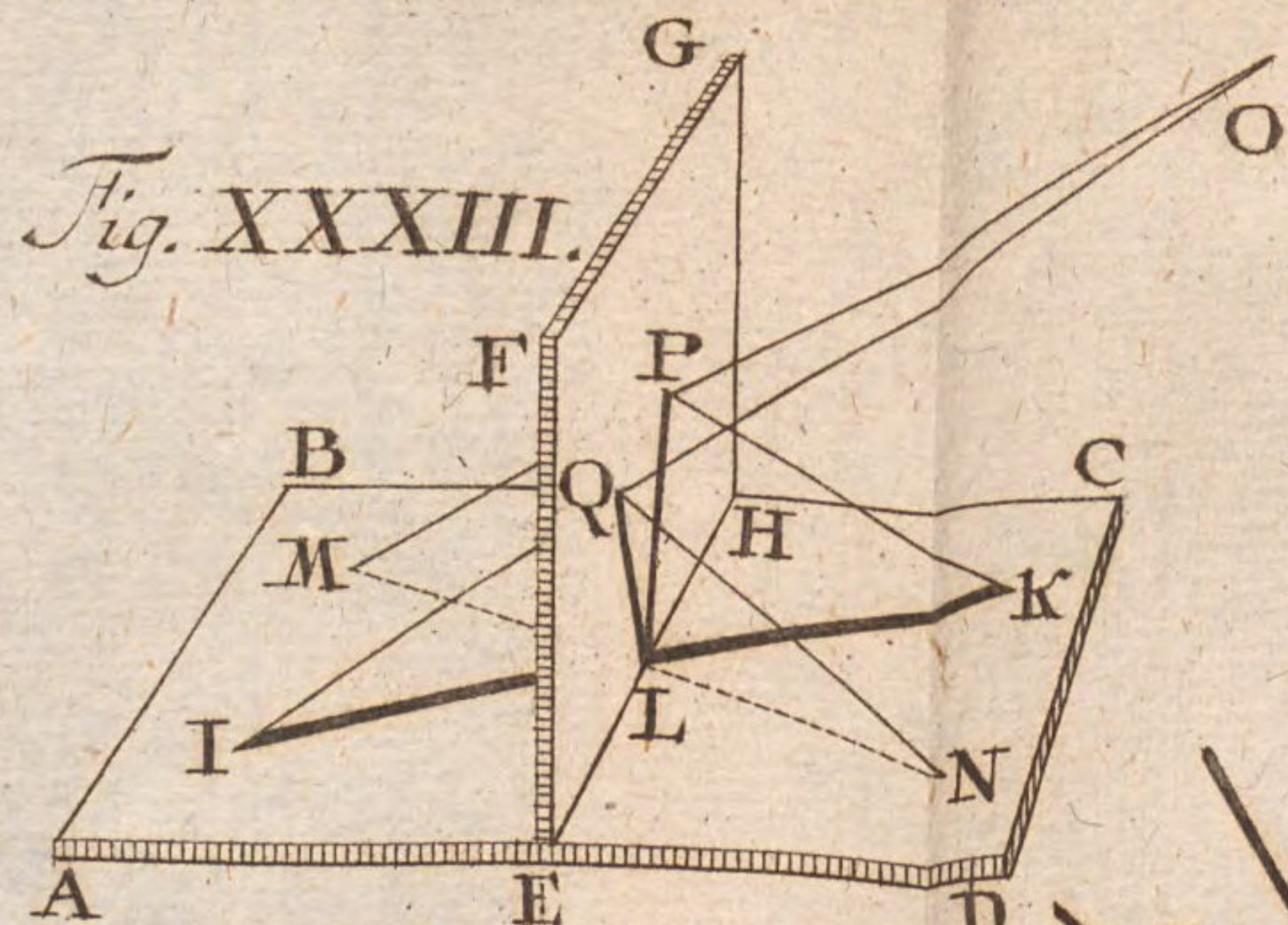


Fig. XXXIII.

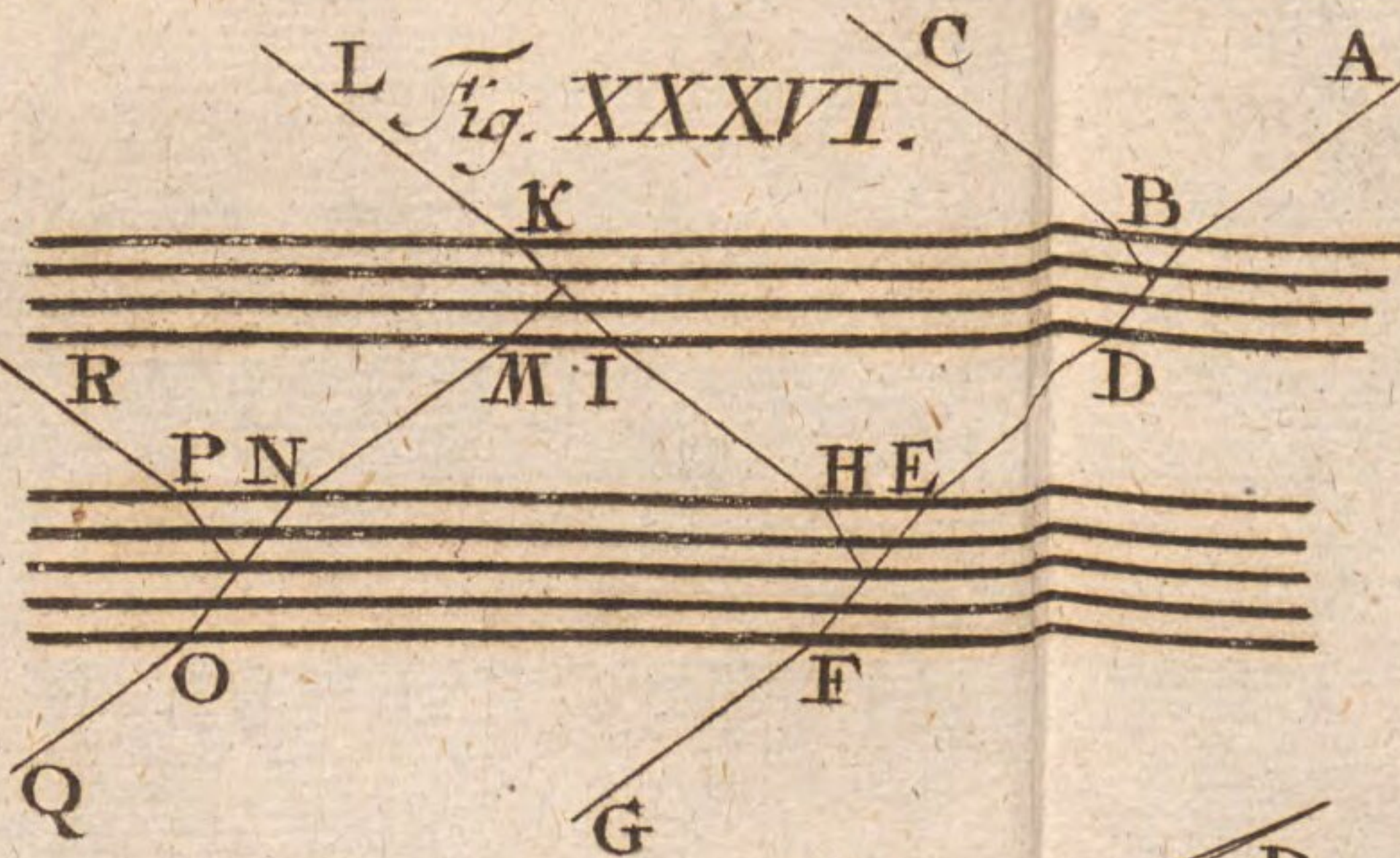


Fig. XXXVI.

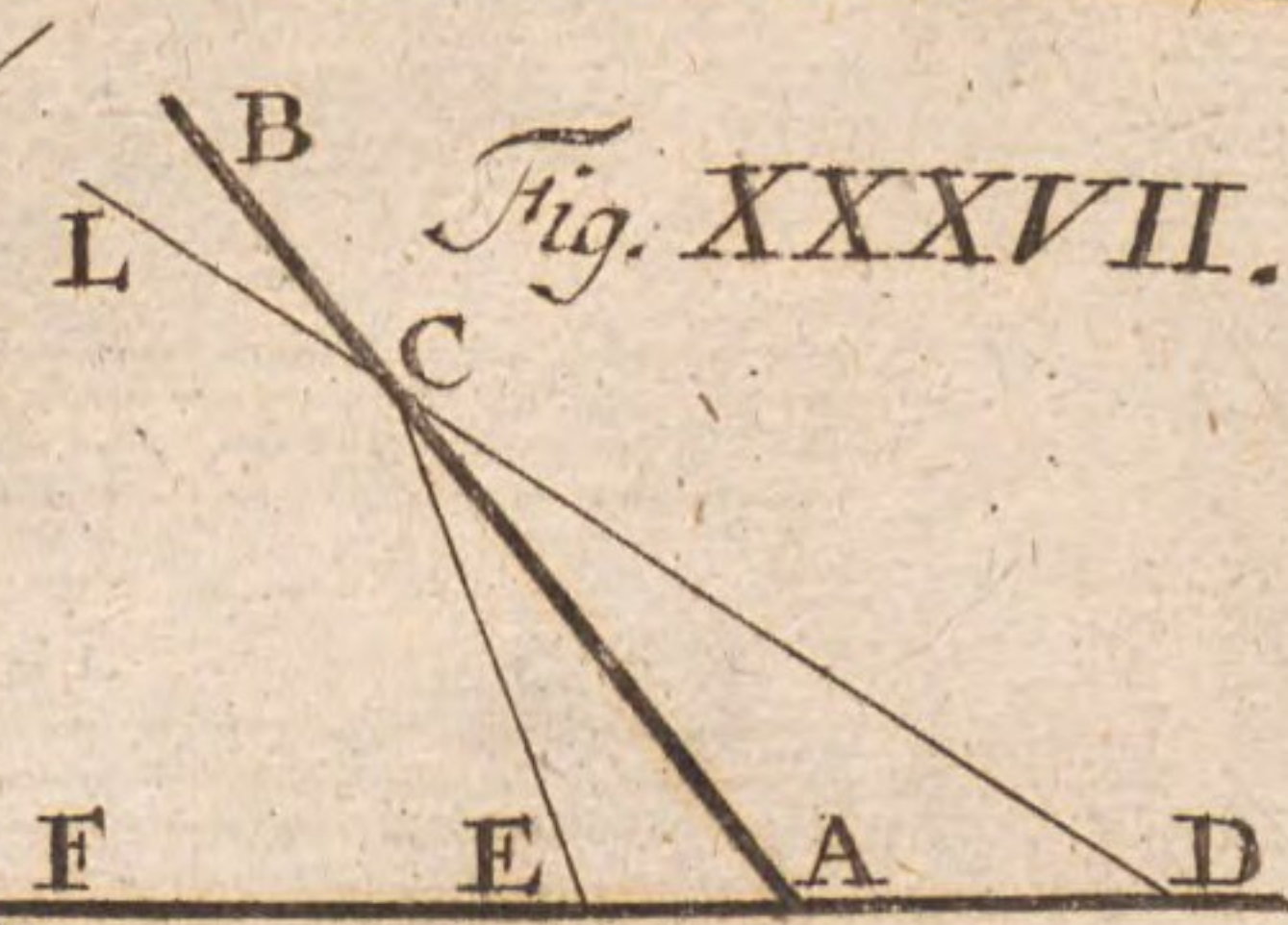


Fig. XXXVII.



Fig. XXXVIII.



Fig. XXXIX.



Fig. XL.

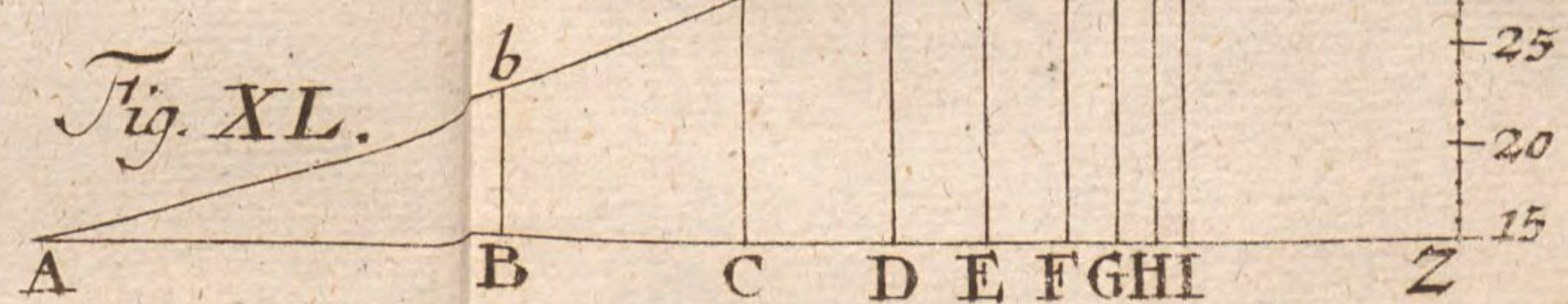


Fig. XLII.



Fig. XLIII.



Fig. XLIV.



Fig. XLV.

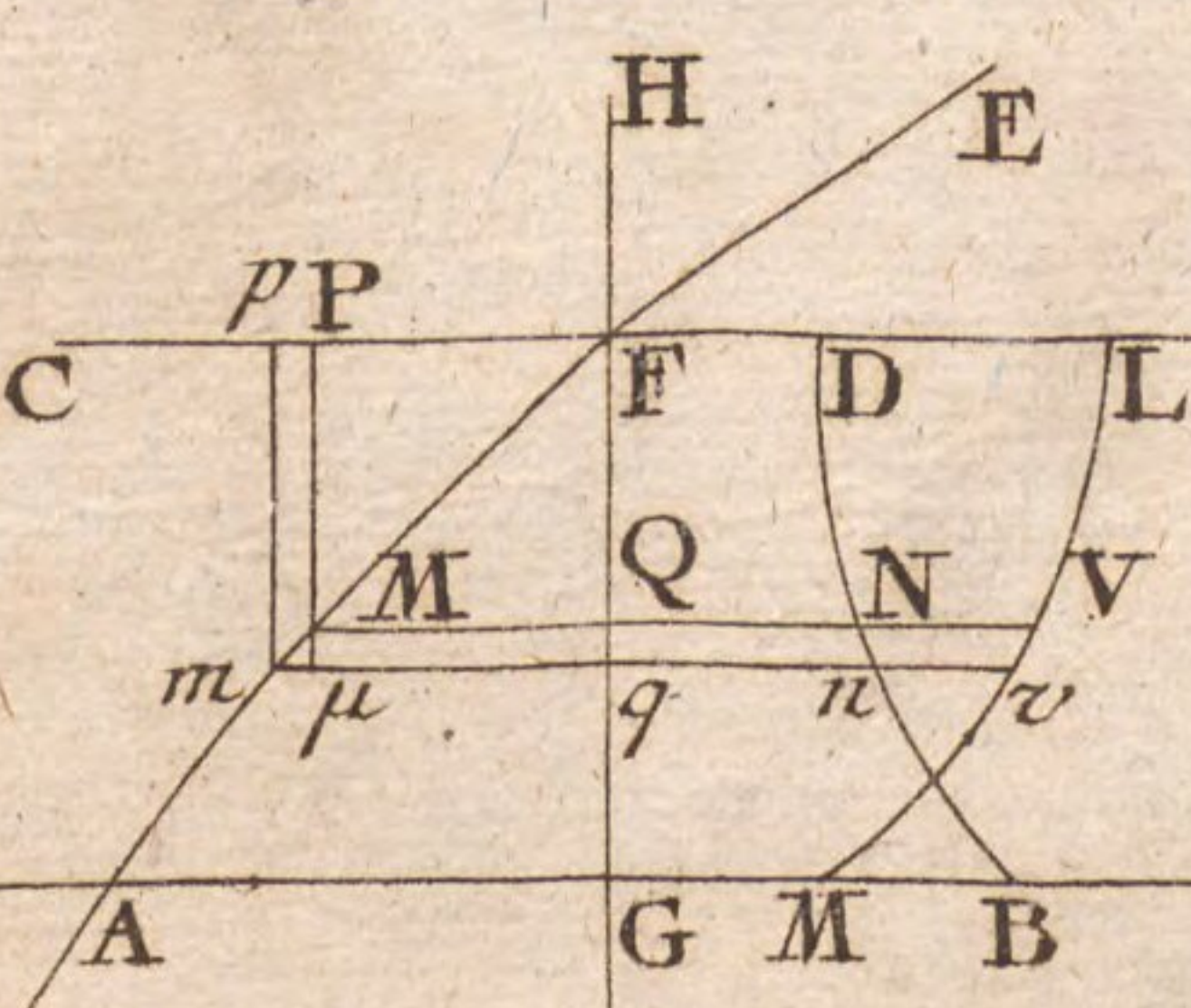


Fig. XLVI.

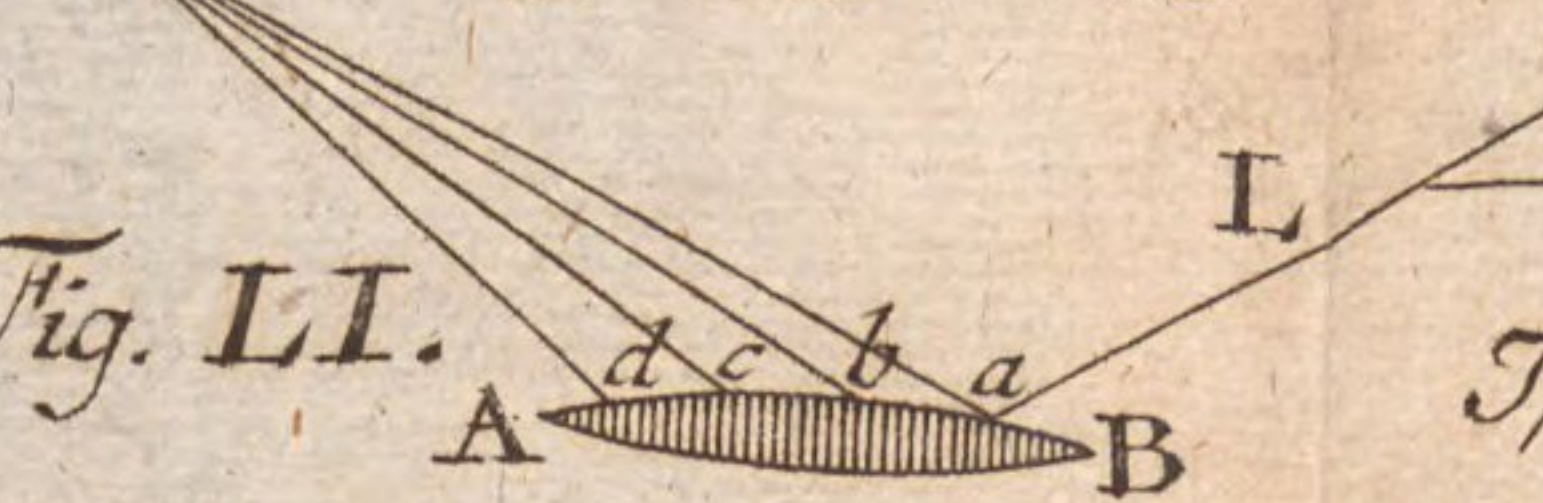


Fig. LI.

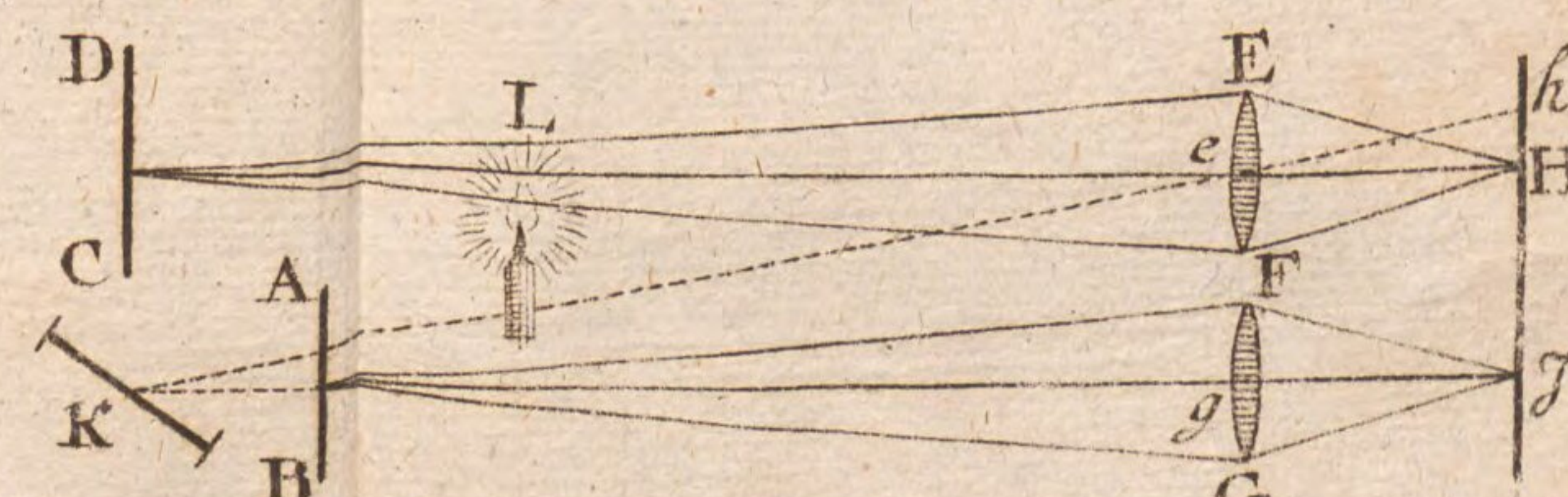


Fig. XLVII.

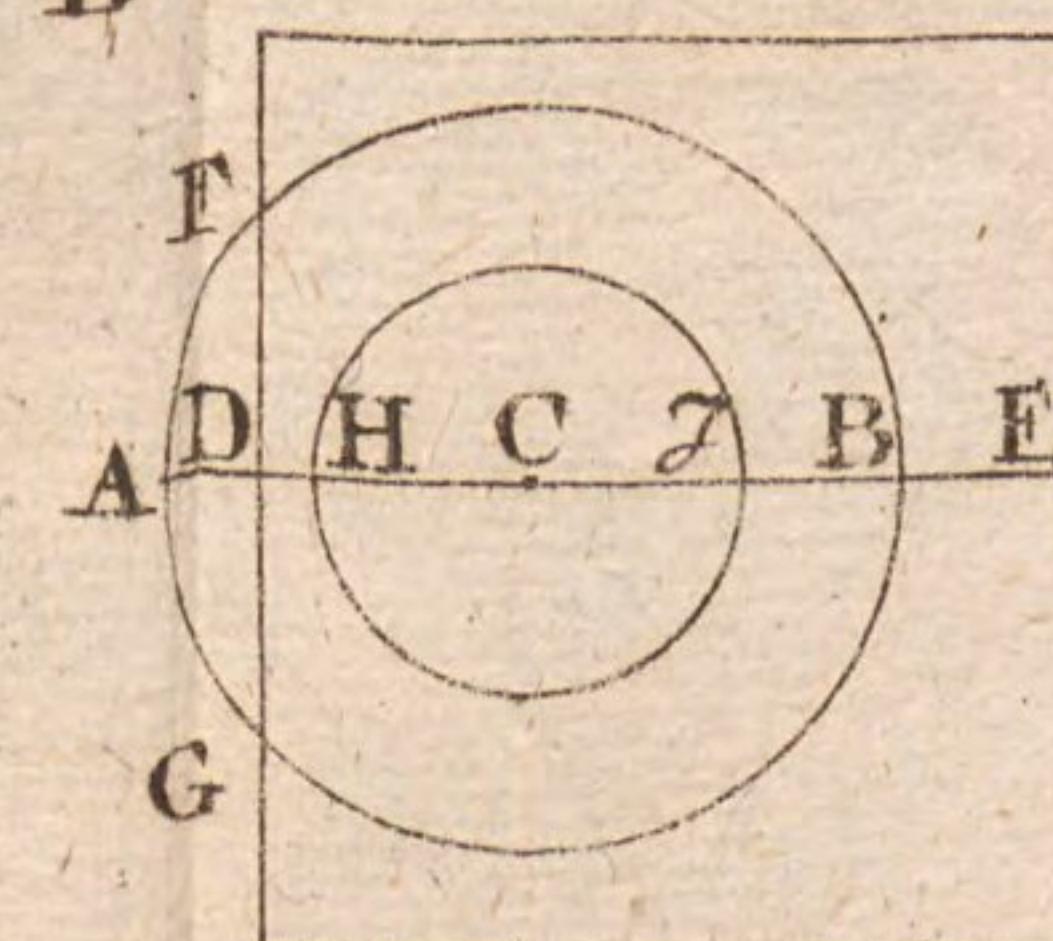


Fig. XLVIII.

Fig. XLVI.

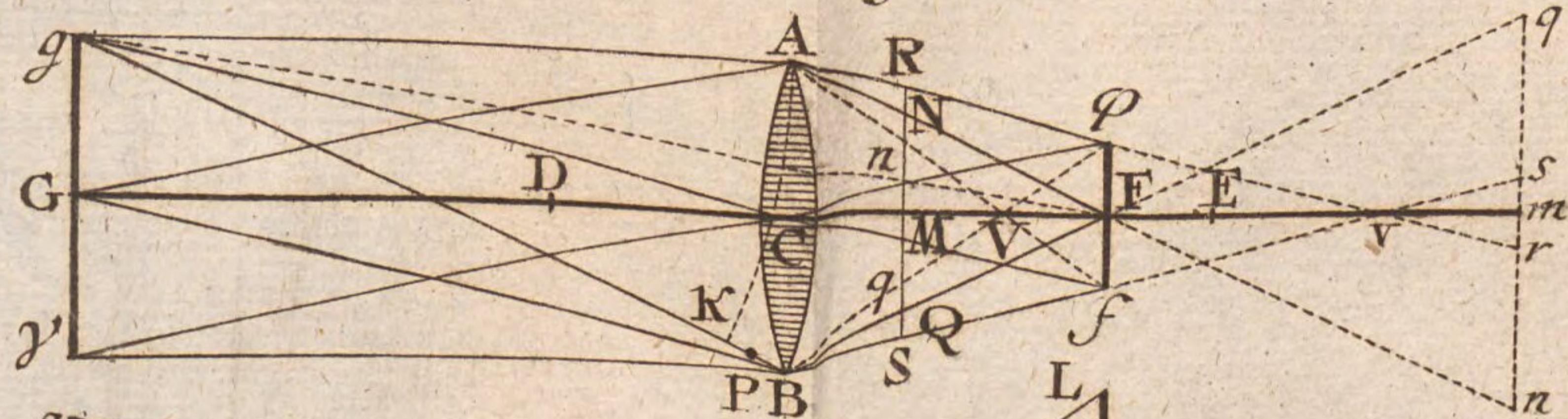


Fig. LII.

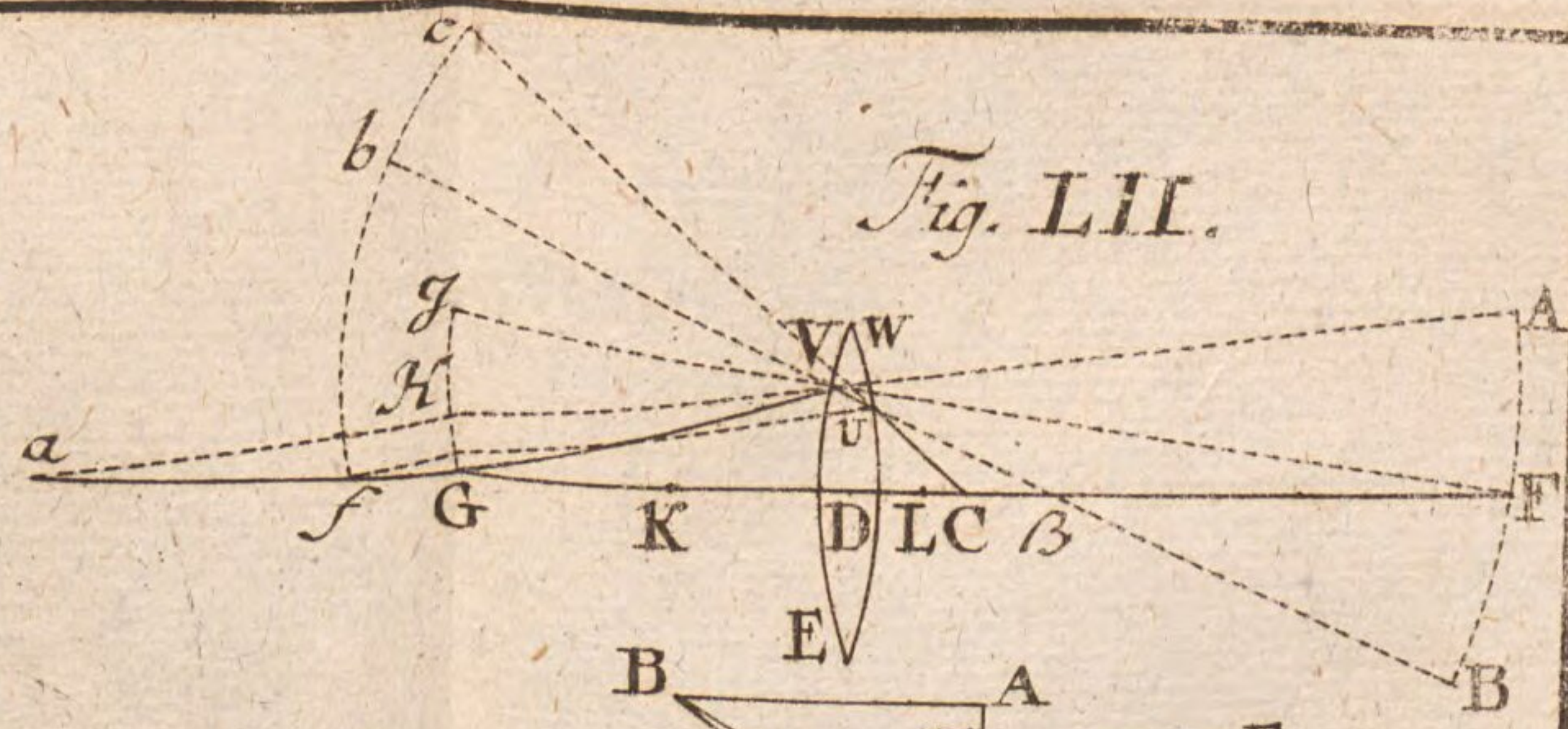


Fig. LIII.

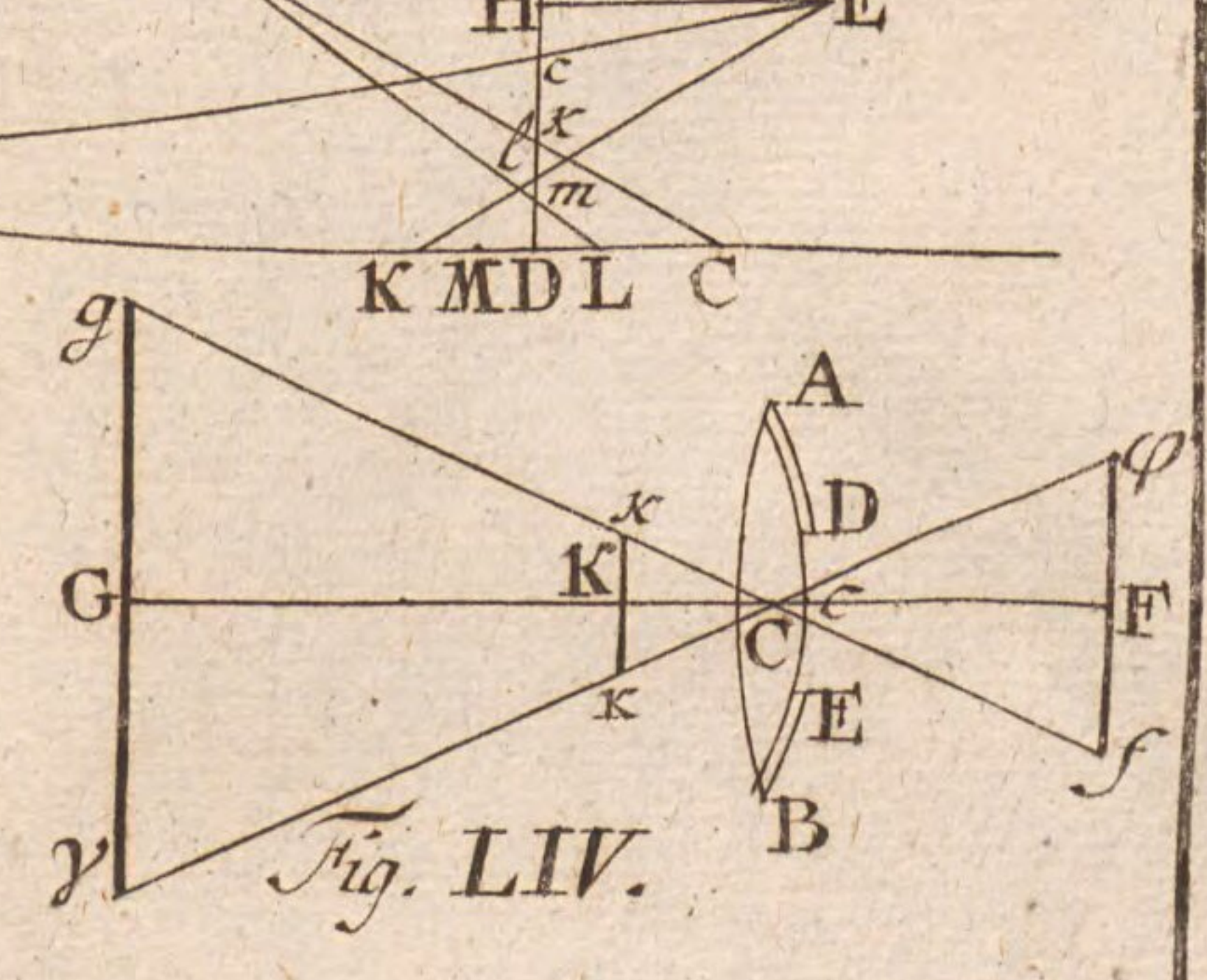
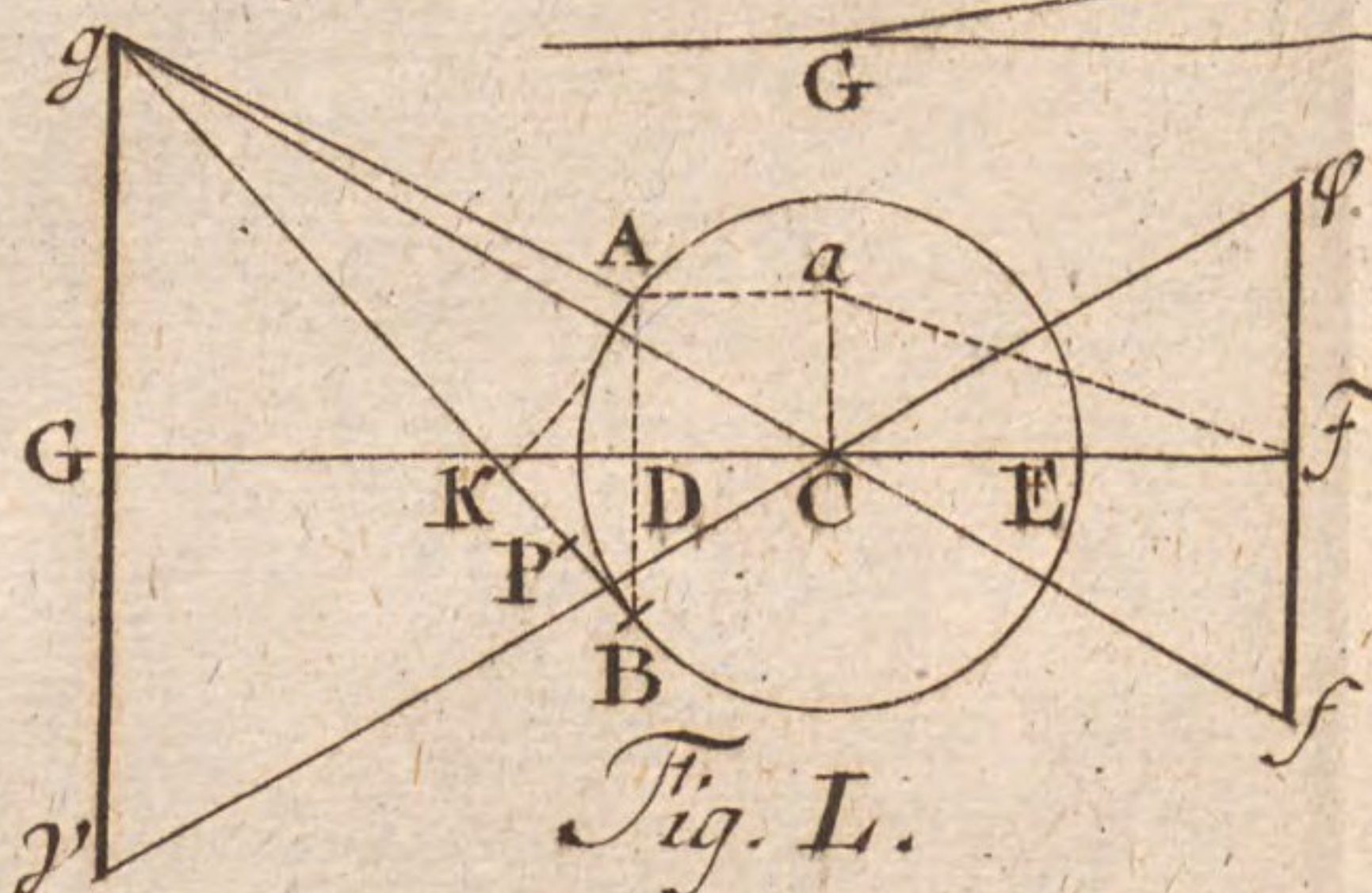


Fig. XLIX.

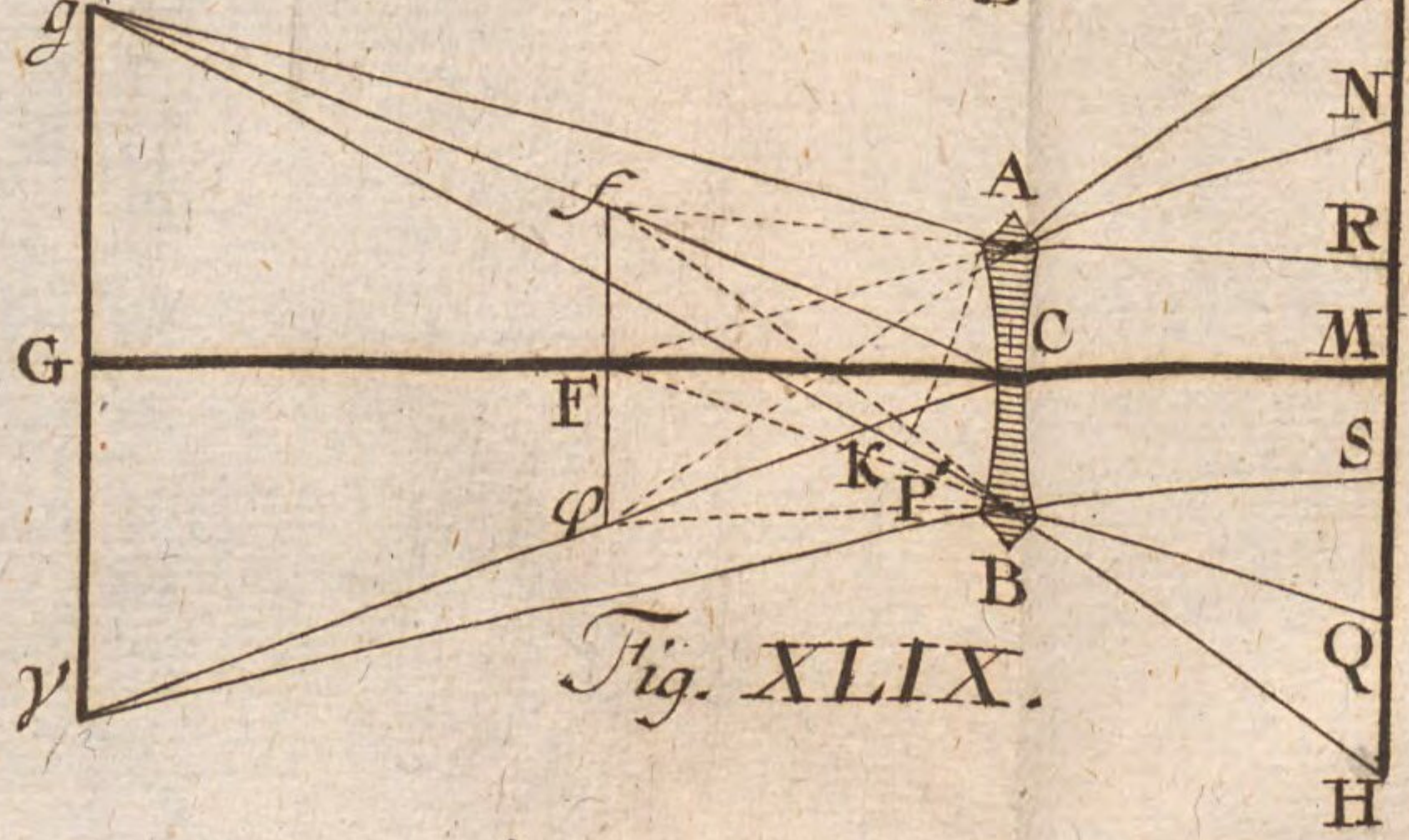


Fig. L.

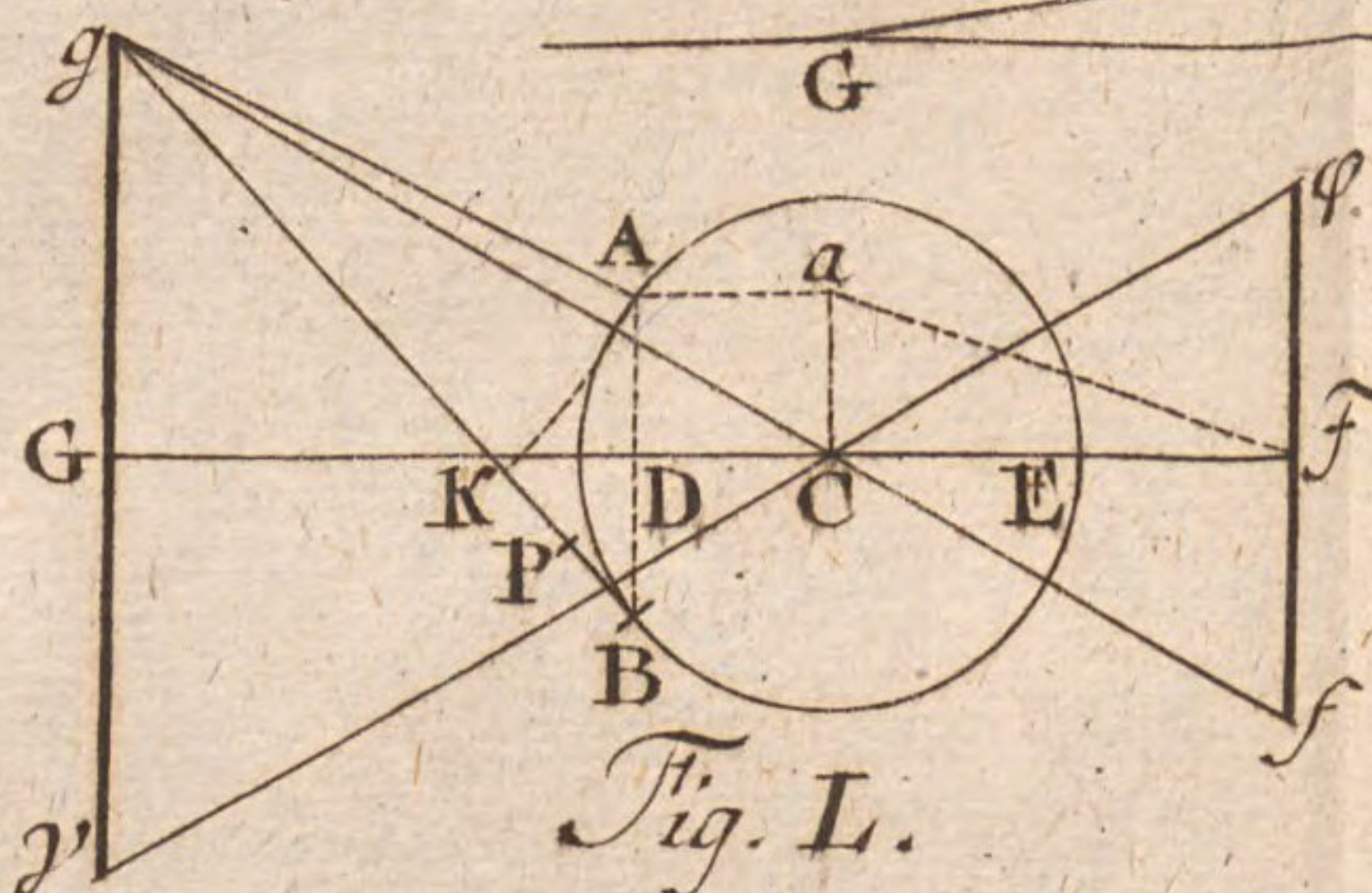


Fig. LV.

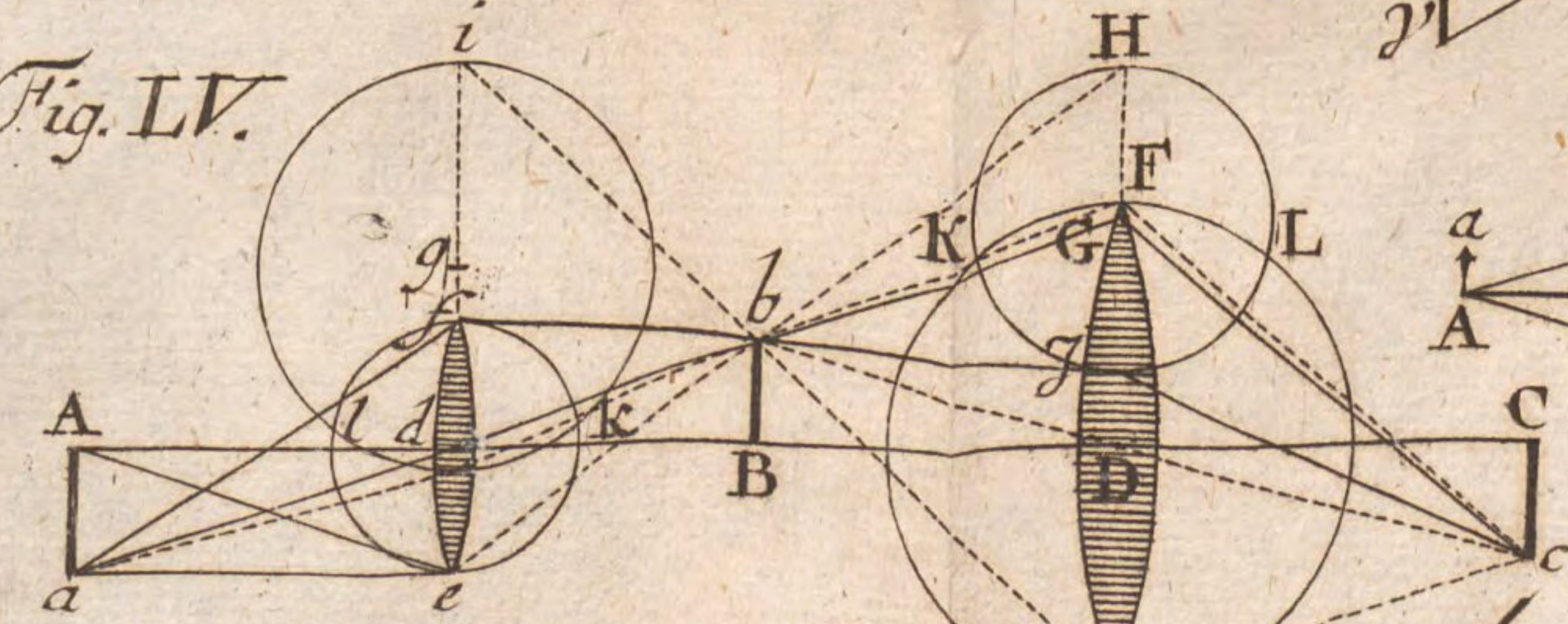


Fig. LVI.

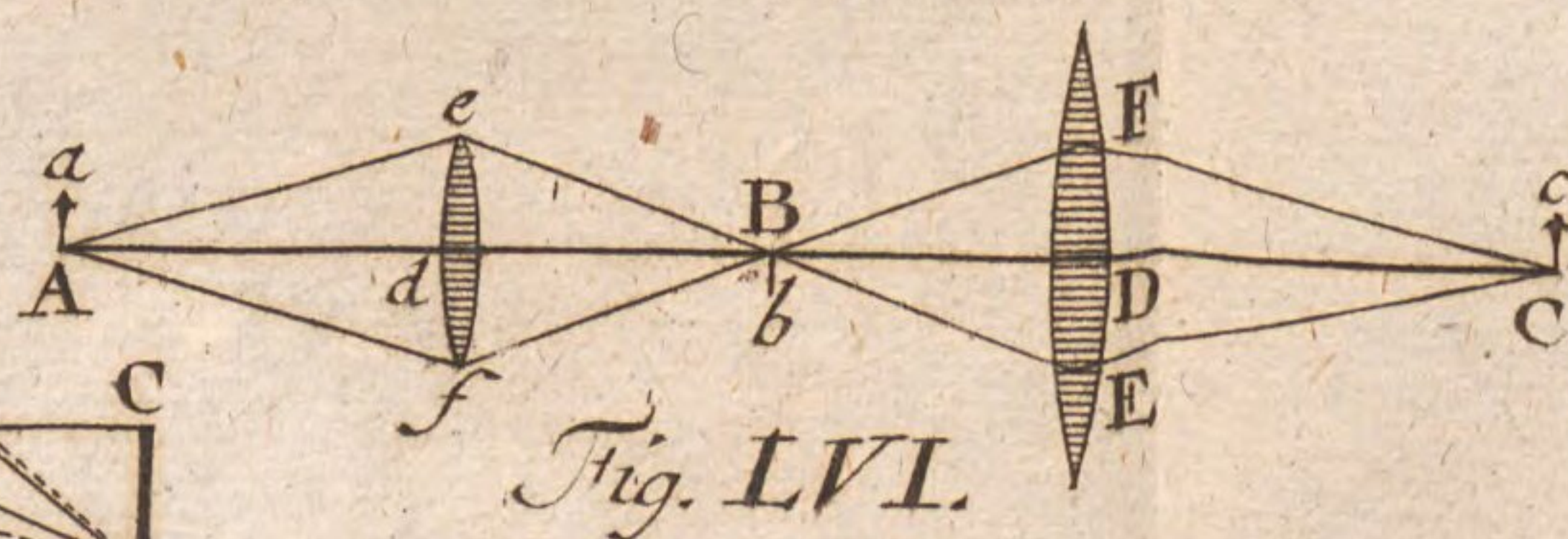


Fig. LVIII.

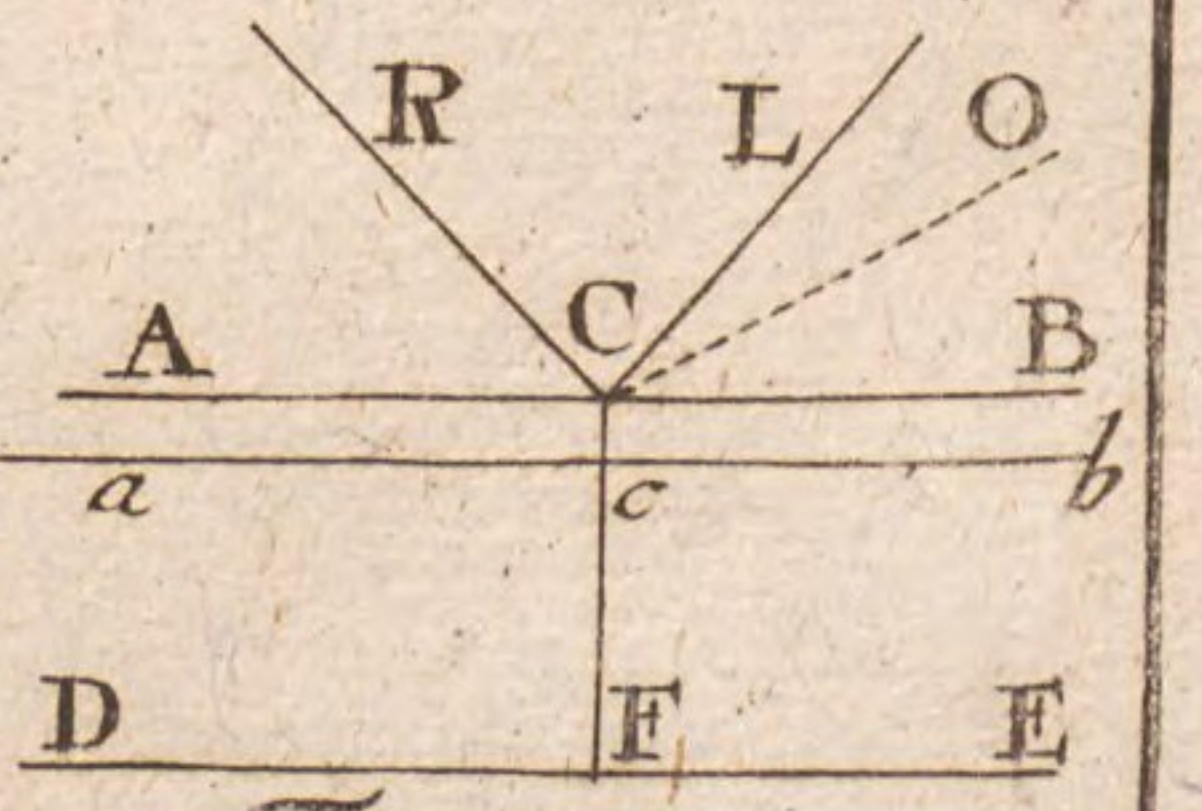


Fig. LVII.

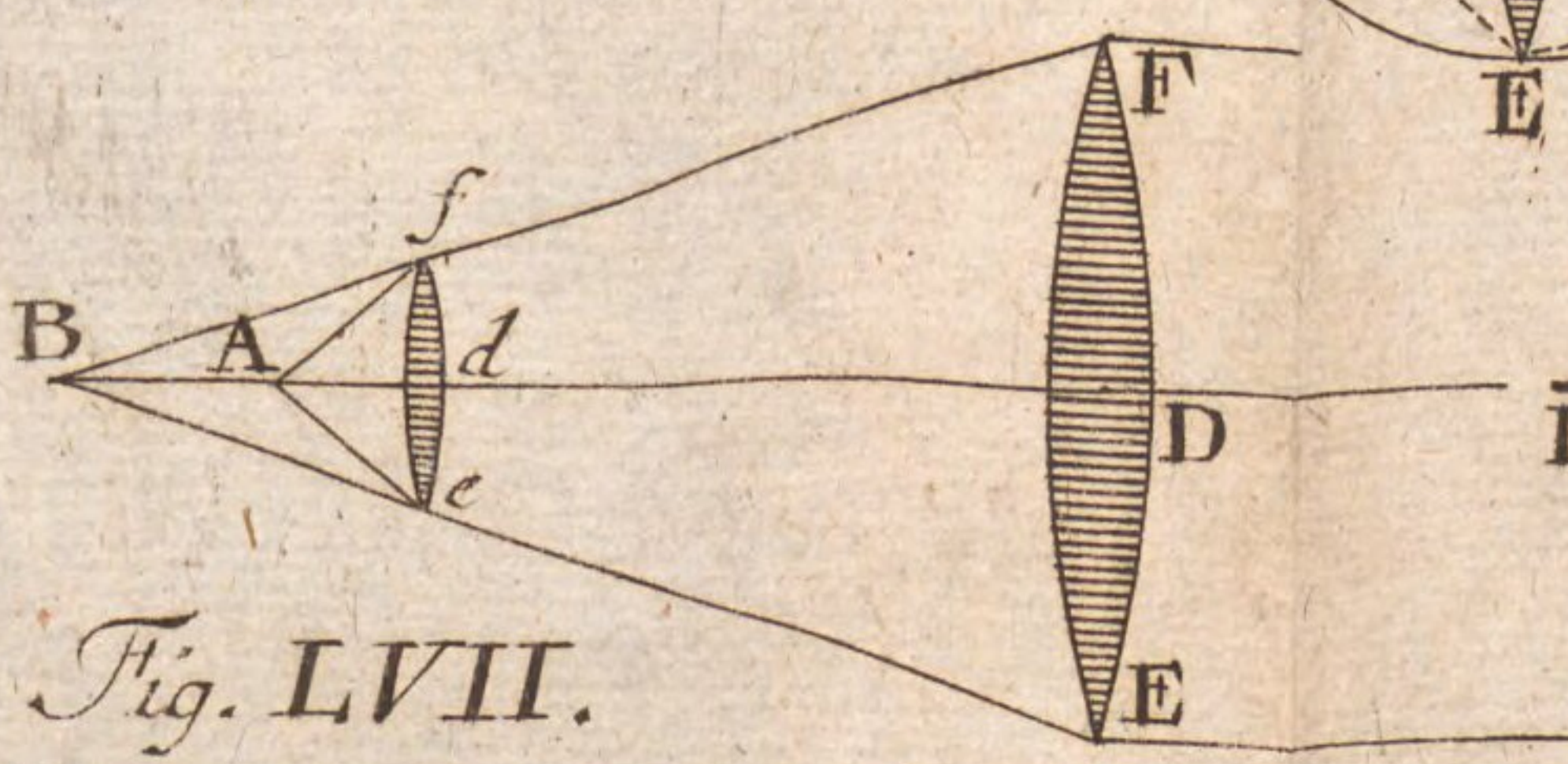


Fig. LIX.

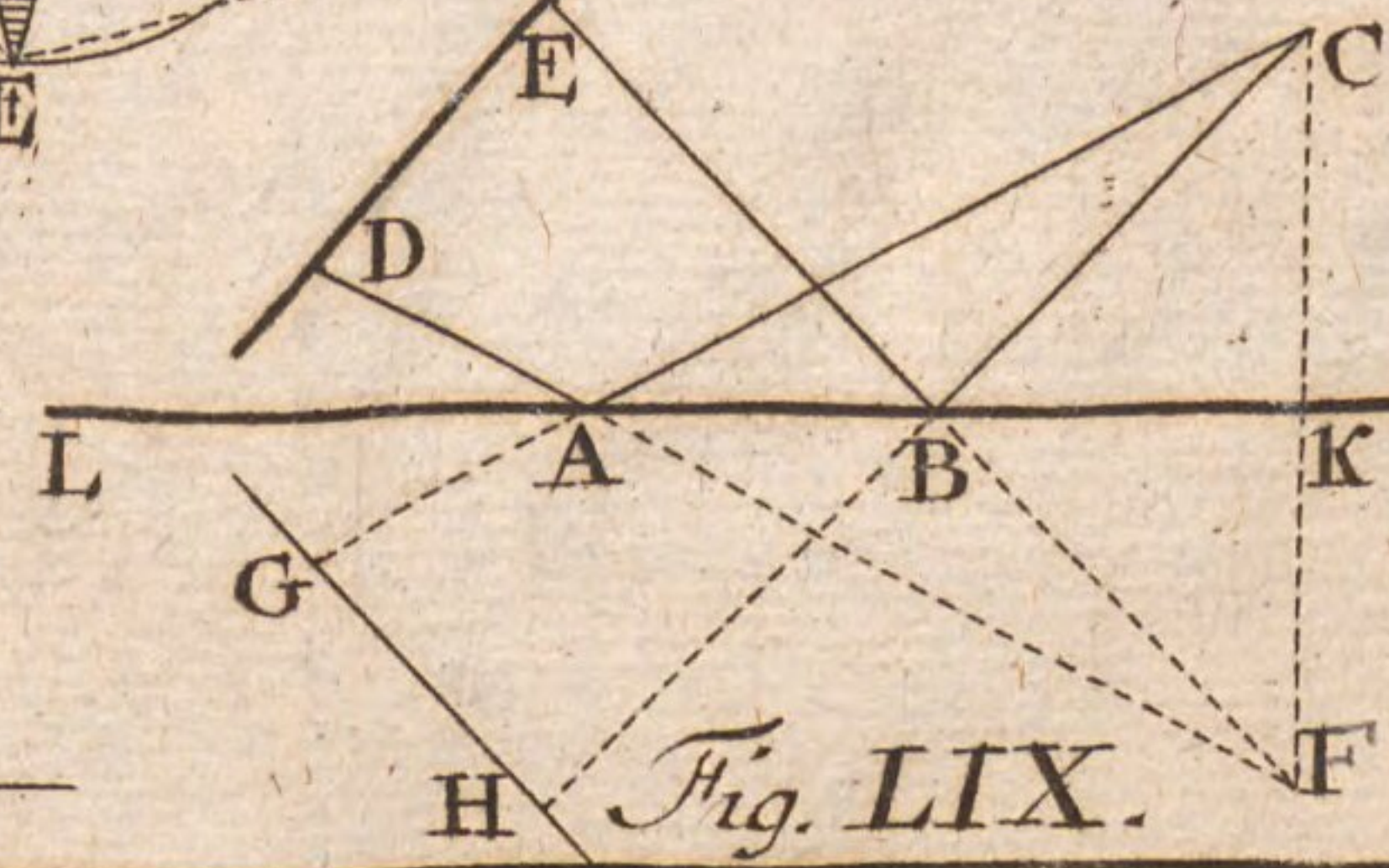
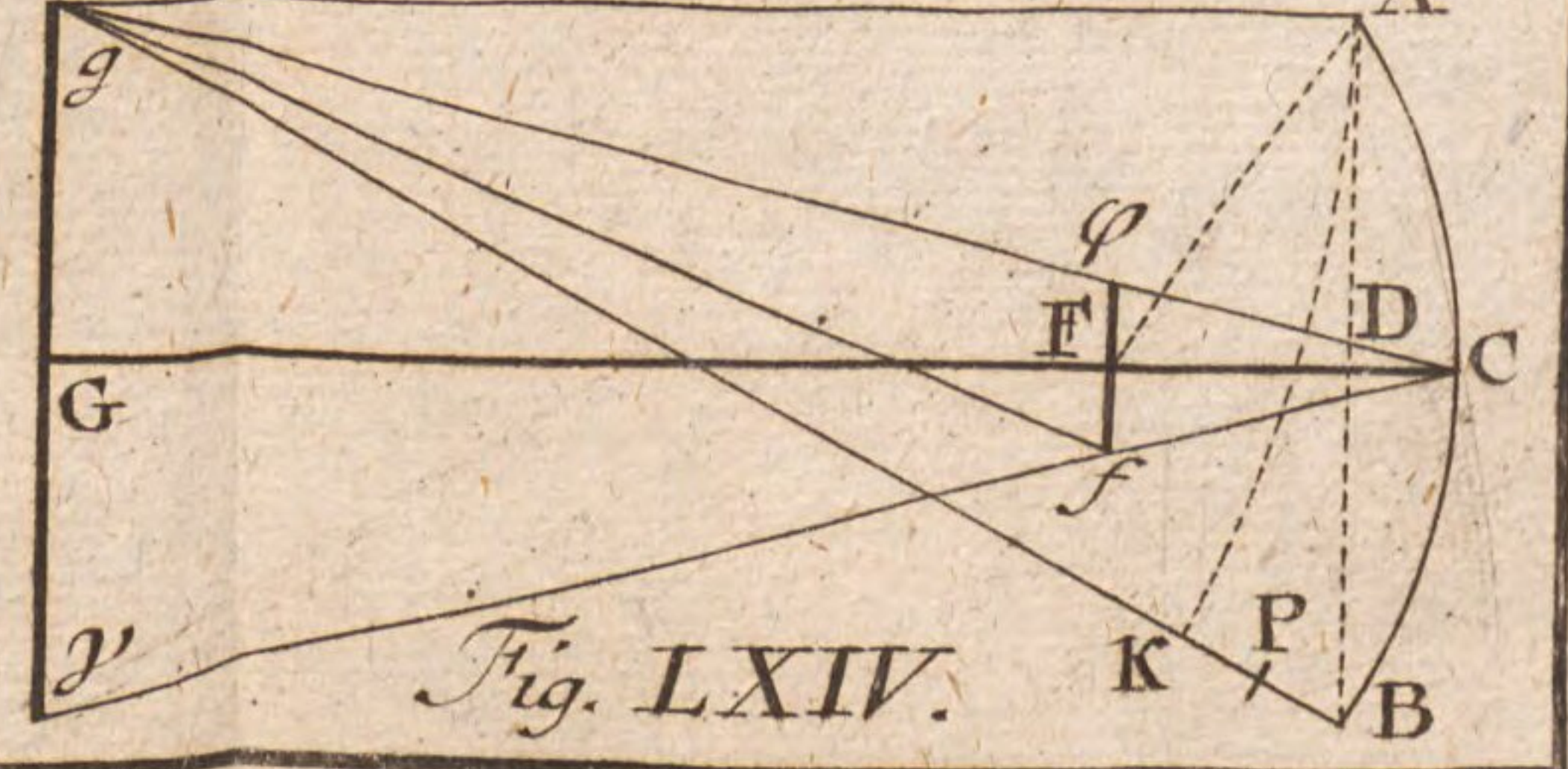
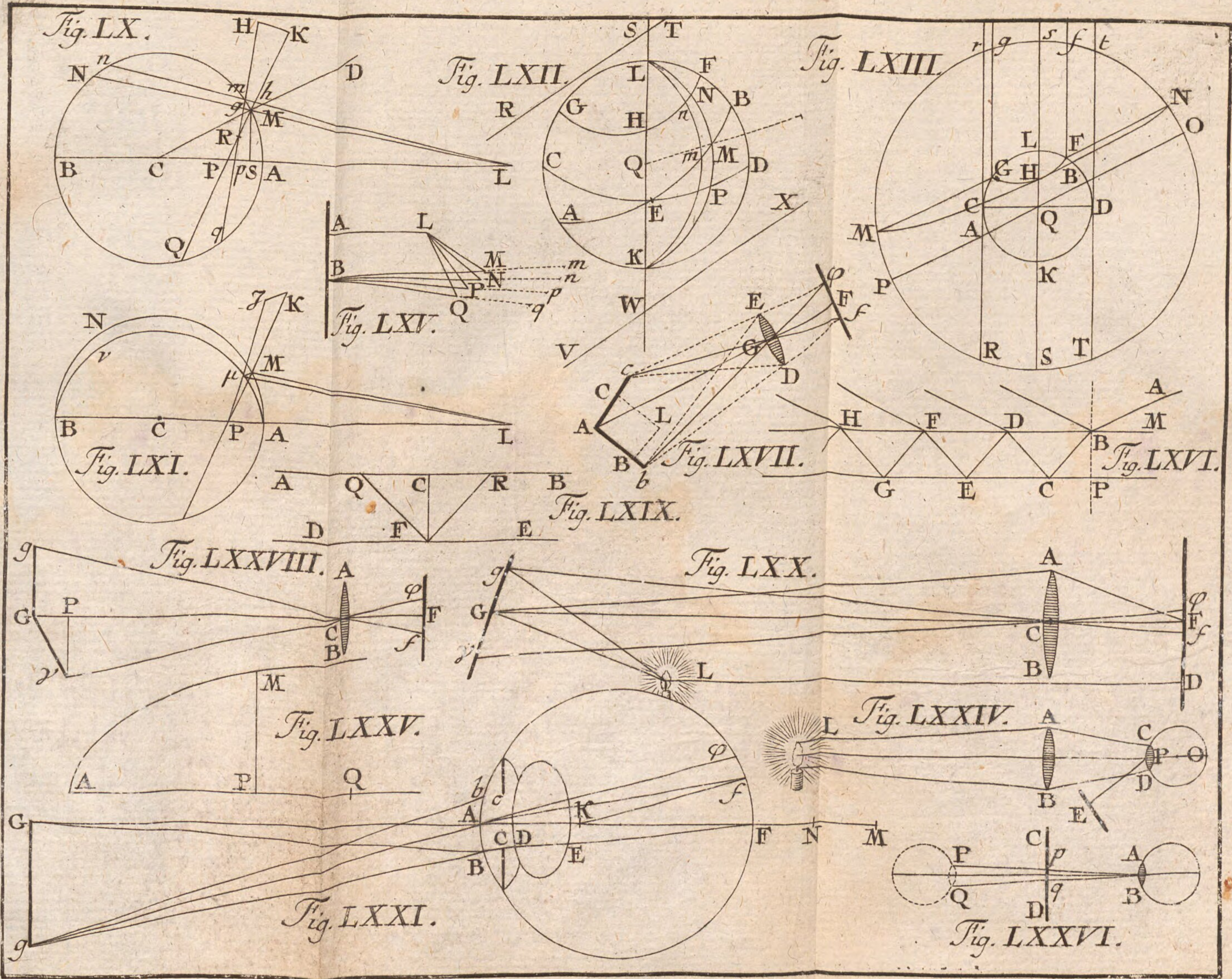
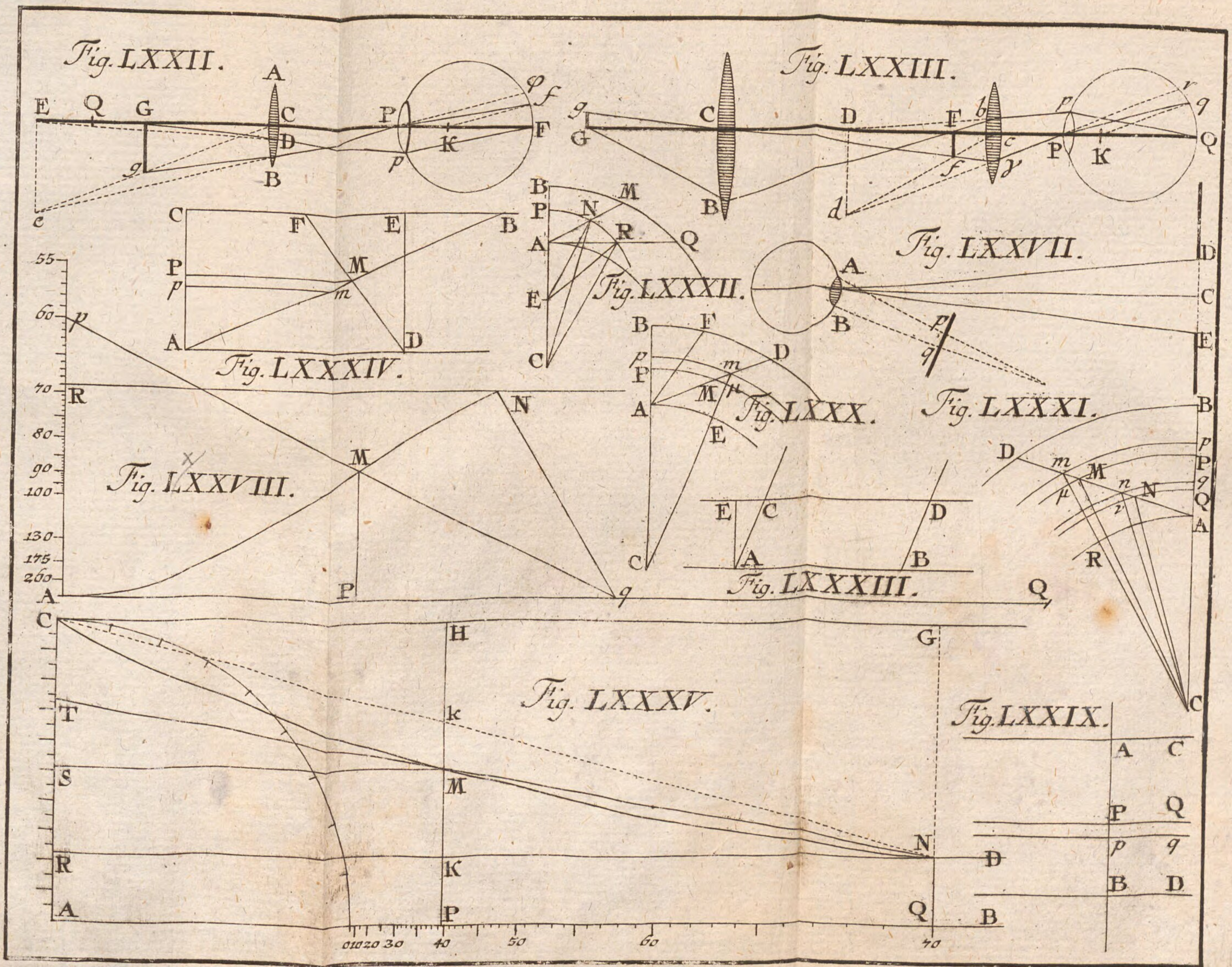
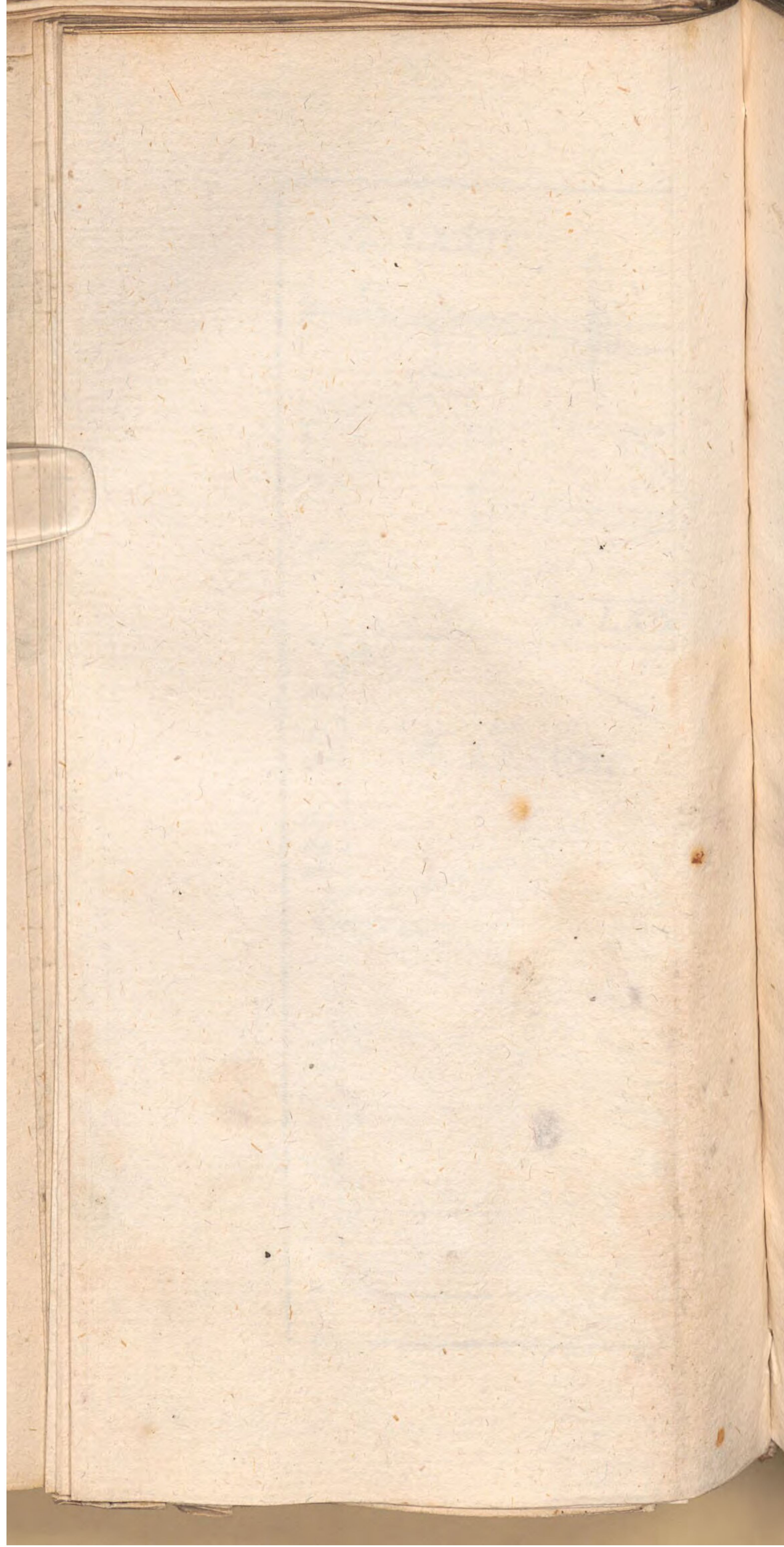


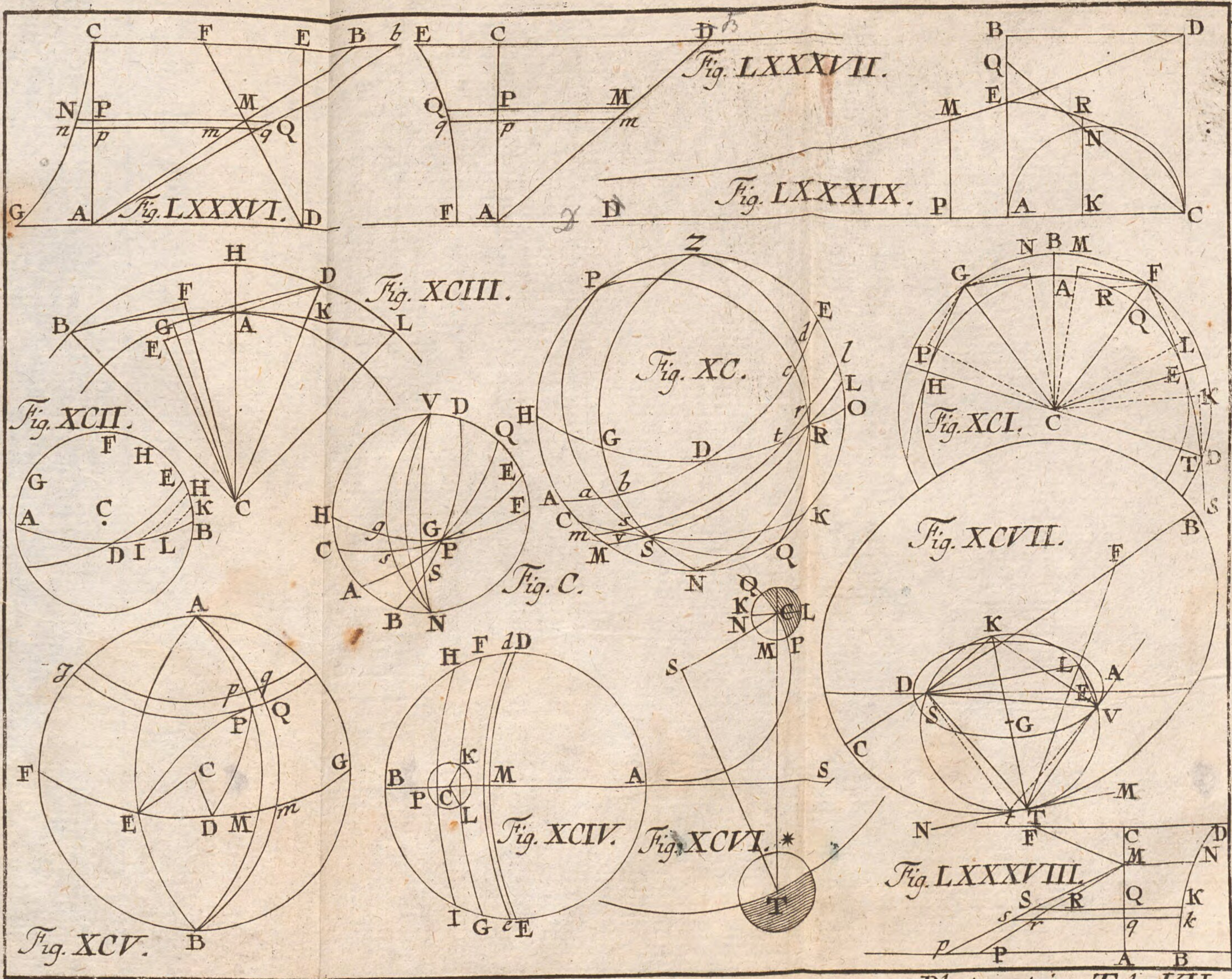
Fig. LXIV.

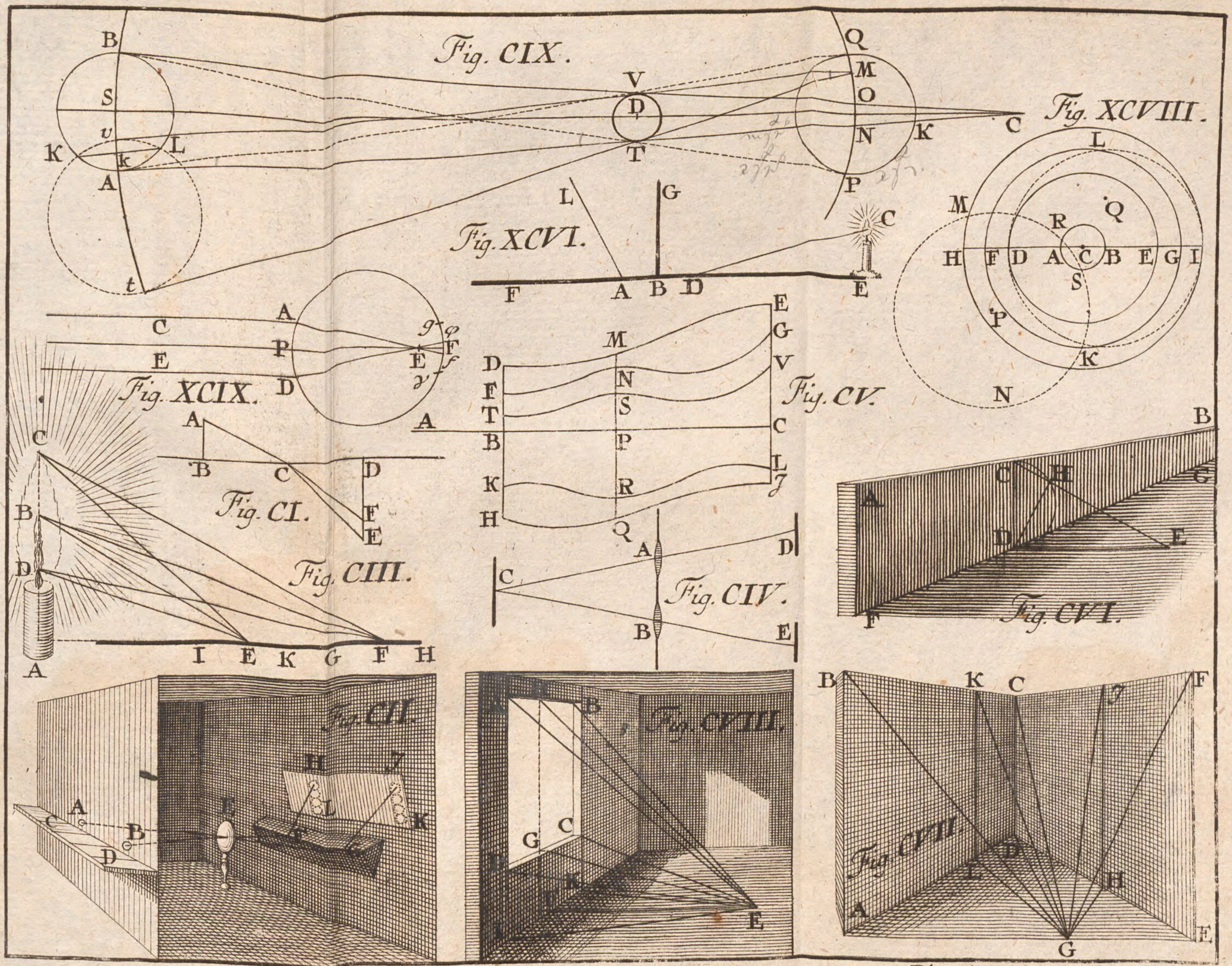












Lambert, Johann Heinrich,

Photometria

Augusta Vindelicorum 1760

Phys.sp. 368

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10134112-0

VD18 14486245-001